FRAZIONI CONTINUE

◇ Algoritmo euclideo $\quad \frac{A}{B}$ $\quad$ libro VII di Euclide

$A \geq 0 \quad B > 0$

◇ ☆ è intrinseco

$A = q_0 B + R_1 \qquad B = R_0$

$B = q_1 R_1 + R_2 \qquad 0 \leq R_1 < B$

$\qquad\qquad\qquad\qquad 0 \leq R_2 < R_1$

$\vdots$

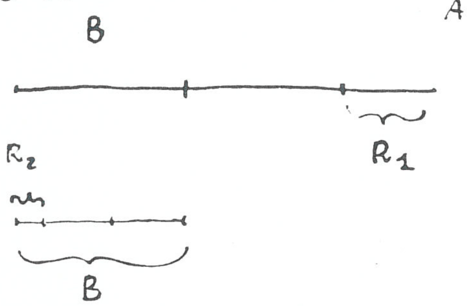
$R_{n-1} = q_n R_n + R_{n+1}$

se per qualche n è $R_{n+1} = 0$,

◇ R_n è la massima grandezza sottomultipla comune di A e B

(se $A, B \in \mathbb{N}$, $R_n = \text{M.C.D.}(A, B)$)

• A e B sono commensurabili $\Leftrightarrow$ il procedimento si arresta



★ In generale $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$

XI-1

☆ $$\frac{A}{B} = \Big(\underbrace{q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{\ddots q_n}}}_{[q_0; q_1, \dots q_n]}\Big) + (-1)^n \frac{R_{n+1}}{\alpha_n B}$$

$[q_0; q_1, \dots q_n]$ ridotta n-esima (già ai minimi termini)

$\alpha_n \geq 1$

approssimazioni alternativamente per difetto e per eccesso

◇ L'ALGORITMO GRECO (?)

V2

MATEMATICHE COMPLEMENTARI II

Prof. Marco Spera

UCSC Brescia

Lezione XI

☆ Fatto fondamentale

$$\left[\frac{p}{q} < \frac{r}{s} \implies \frac{p}{q} < \frac{p+r}{q+s} < \frac{r}{s} \right]$$

Sia $\quad \frac{p}{q} < \vartheta < \frac{r}{s}$

Ex: $\boxed{\vartheta = \sqrt{2}}$

ϑ			ϑ	
0 : 1	1 : 0	$\boxed{1:1}$		
1 : 1	1 : 0		2 : 1	
1 : 1	2 : 1		$\boxed{3:2}$	2
1 : 1	3 : 2	4 : 3		
4 : 3	3 : 2	$\boxed{7:5}$		2
7 : 5	3 : 2		10 : 7	
7 : 5	10 : 7		$\boxed{17:12}$	2

$\boxed{}$: ridotte della frazione continua

$\updownarrow$: quozienti della frazione

☆ $$\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2 \dots] = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \dots}}$$

XI-7

◇ ESEMPI

• Aristarco: $\dfrac{7921}{4050} > \dfrac{88}{45}$

$\dfrac{7921}{4050} = [1; 1, 21, 1, 2, 29, 2]$

$[1; 1, 21, 1] > \dfrac{7921}{4050}$

ma ☆ $[1; 1, 21, 2] = \dfrac{88}{45} < \dfrac{7291}{4050}$

• Aristarco: $a = \dfrac{71755875}{61735500} > \dfrac{43}{37}$

$a = \dfrac{21261}{18292} \cdot \dfrac{3375}{3375} = [1; 6, 6, 4, 1, 2, 1, 2, 1, 6]$

$> [1; 6, 6] = \dfrac{43}{37}$

• Archimede $\dfrac{265}{153} < \sqrt{3} < \dfrac{1351}{780}$

$3\sqrt{3} = \sqrt{27} = [5; 5, 10, 5, 10 \ldots]$

ridotte: $5, \dfrac{26}{5}, \dfrac{265}{51}, \dfrac{1351}{260}$

$\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14 \ldots]$

$[3; 7] = \dfrac{22}{7}$ Archimede $\pi \sim 3,14$

$[3; 7, 15, 1, 292] = \dfrac{355}{113}$ $[3; 7, 15] = \dfrac{333}{106}$

$\sim 3,1415$

◇ IL CICLO METONICO

$\dfrac{\text{anno tropico}^{*}}{\text{mese sinodico}^{**}}$

* da equinozio a equinozio

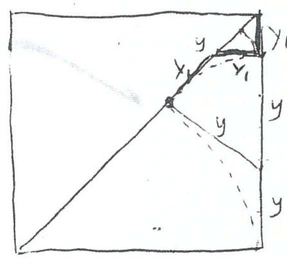
** da luna nuova a luna nuova

$\sim \dfrac{365,242191}{29,530589}$. $12,36826 63 = [12; 2, 1, 2, 1, 1, 17, 3]$

$[12; 2, 1, 2, 1, 1] = \dfrac{235}{19}$ mesi lunari / anni

◇ Metone ~ 450 a.C.

◇ VERSIONI GEOMETRICHE vedi oltre



$(1 + x)^2 = 2$ $x = \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{1}{2 + \frac{1}{2+x}}$

$x = 1 + \dfrac{1}{2 + \frac{1}{2 + \ldots}}$

◇ SEZIONE AUREA: v. oltre

VIII-4

$$\boxed{\text{M.C.D.}\ (88, 45) \qquad (=1)}$$

$88 = 2^2 \cdot 11$

$45 = 3^2 \cdot 5$

$\text{M.C.D.}(88, 45) = 1$

(primi fra loro)

$$\overset{A}{88} = \overset{B}{45} \cdot 1 + \overset{R_1}{43}$$

$$\overset{B}{45} = \overset{R_1}{43} \cdot 1 + \overset{R_2}{2}$$

$$\overset{R_1}{43} = \overset{R_2}{2} \cdot 21 + \overset{R_3}{1}$$

$$R_2 = 2 = 2 \cdot 1 = 2 \cdot R_3 \quad \neq 0$$

l'ultimo resto non nullo fornisce il M.C.D.

Frazione continua

$$\frac{88}{45} = 1 + \frac{43}{45} = 1 + \frac{1}{\frac{45}{43}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{2}{43}} =$$

$$= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{43}{2}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{21 + \frac{1}{2}}}$$

$$\boxed{\frac{88}{45} = [1;\ 1, 21, 2]}$$

verifica a ritroso

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{43}{2}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{2}{43}} = 1 + \frac{1}{\frac{45}{43}} = 1 + \frac{43}{45} = \frac{88}{45}$$

$\boxed{M.C.D.\ (36, 8)}$

$$36 = 2^2 \cdot 3^2$$
$$8 = 2^3$$
$$M.C.D = 2^2 = 4$$

$$\begin{array}{ccccc} A & & B & & R_1 \\ 36 & = & 8 \cdot 32 & + & 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} B & & R_1 & & \\ 32 & = & 4 \cdot 8 & + & 0 \end{array}$$

$\Rightarrow$ l'ultimo resto non nullo è R_1

$\Rightarrow$ $M.C.D. (36, 8) = 4$

fraziome continua

$$\frac{36}{8} = 4 + \frac{4}{8} = 4 + \frac{1}{\frac{8}{4}} = 4 + \frac{1}{2} \quad \left(= \frac{9}{2} \right)$$

$$= [4; 2]$$

(le ridotte di una frazione continua sono sempre "ridotte ai minimi termini")

$\boxed{M.C.D. (117, 91)}$

$$117 = 13 \cdot 9 = 13 \cdot 3^2$$
$$91 = 13 \cdot 7$$
$\Rightarrow M.C.D. (117, 91) = 13$

$$\begin{array}{ccccc} A & & B & & R_1 \\ 117 & = & 91 \cdot 1 & + & 26 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} B & & R_1 & & R_2 \\ 91 & = & 26 \cdot 3 & + & 13 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} R_1 & & R_2 & & \\ 26 & = & 13 \cdot 2 & + & 0 \end{array}$$

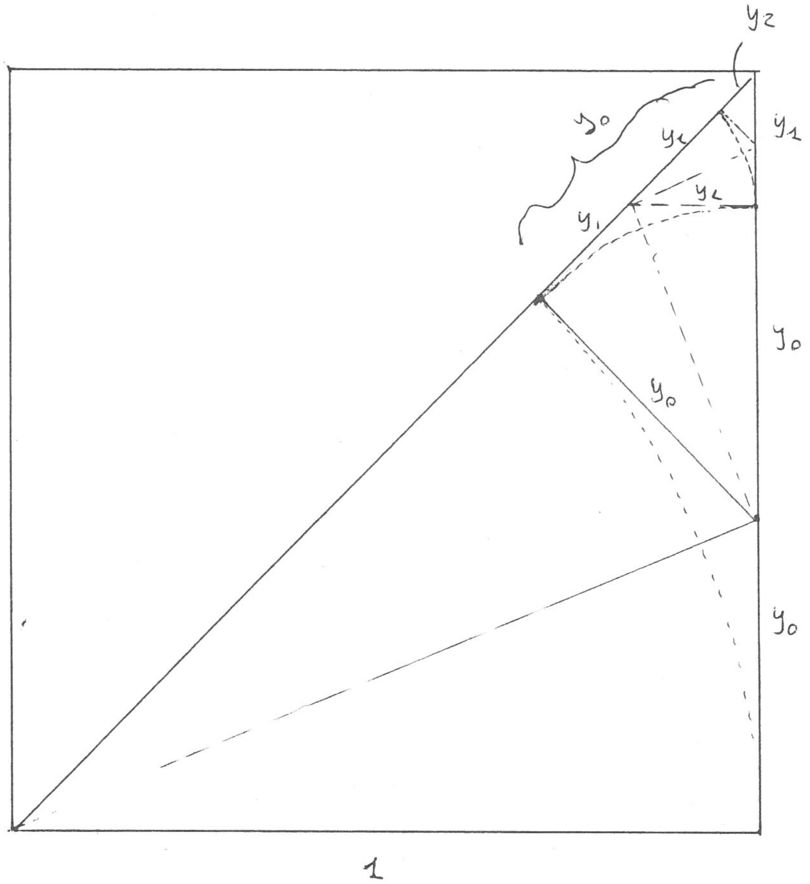
$\Rightarrow M.C.D. = 13$

$$\frac{117}{91} = 1 + \frac{26}{91} = 1 + \frac{1}{\frac{91}{26}} = 1 + \frac{1}{3 + \frac{13}{26}} = 1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2}}$$

$$= 1 + \frac{2}{7} = \frac{9}{7}$$

$$\frac{117}{91} = [1; 3, 2] = \frac{9}{7}$$

Incommensurabilità del lato e della diagonale di un quadrato
(versione geometrica)



$\sqrt{2} = 1 \cdot 1 + y_0$

$1 = 2y_0 + y_1$

$y_0 = 2y_1 + y_2$

Stessa struttura ricorsiva

$y_{n-1} \overset{!}{=} 2y_n + y_{n+1}$

$y_0 = x$

$(1+x)^2 = 2$

$1 + 2x + x^2 = 2$

$x(x+2) = 1$

$x = \dfrac{1}{x+2}$

$x = \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{x+2}}$

$= \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{x+2}}}$

$x = \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{2}}}}$

$\sqrt{2} = 1 + x = 1 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{2 + \dots}}$

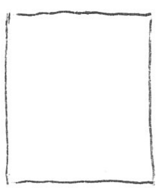
$$\boxed{\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \dots}}}}$$

$$\boxed{\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, \dots]}$$

$\sqrt{2} = 1,414\dots$

Il procedimento non può ovviamente avere termine, da ciò l'incommensurabilità.

$\sqrt{2} \cdot 21$
$\sim 29,7$



21

foglio A4

esteticamente gradevole

forse non come

$\Phi = 1,618\dots$

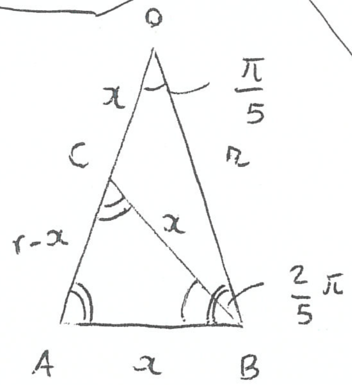
$= \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{1 + \dots}}}$

Digressione : la sezione aurea

Determiniamo l_{10}, lato del decagono regolare di raggio r

e quindi l_5, lato del pentagono regolare di raggio r

Analisi



$$\frac{x}{r-x} = \frac{r}{x}$$

$$\left[x^2 = r\underbrace{(r-x)}_{\text{"parte residua"}} \right]$$

$x^2 = 1-x$

$x^2+x=1$

$x(x+1)=1$

$x = \frac{1}{x+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{x+1}}$

$= \ldots$

$x = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}$

$= [0;1,1,1\ldots]$

$\frac{1}{x} = 1+x$

$\Rightarrow \Phi = 1{,}618\ldots$

$\Phi = [1;1,1,1\ldots]$

$$\boxed{x : \text{sezione aurea di } r}$$

$$x^2 + rx - r^2 = 0$$

$$x = \frac{-r \pm \sqrt{r^2+4r^2}}{2} = -\frac{r}{2} \pm \frac{r\sqrt{5}}{2} = \left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}\right) r$$

la radice negativa si scarta ; si prende

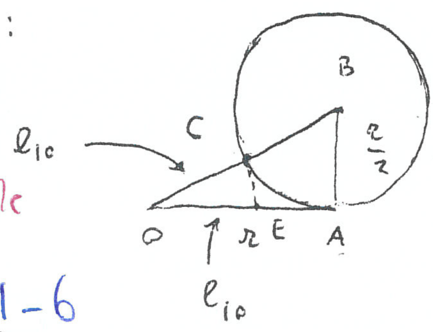
$$x = l_{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} r$$

l_{10} è la sezione aurea del raggio

Per costruirla da $x = \sqrt{r^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2} - \frac{r}{2}$

si procede così :

vedi anche oltre per una figura più grande



anche $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} = 1{,}618\ldots$ è detto sezione aurea

Costruire l_5, a partire da r e l_{10} è immediato (v. anche oltre).

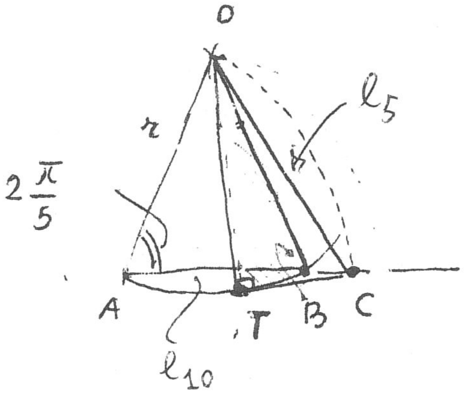
Dimostriamo anche che

$$(*) \quad \boxed{l_5^2 = r^2 + l_{10}^2}$$

$r^2 = l_6^2$ * lato dell'esagono regolare

($\Rightarrow$ l_5 è facilmente costruibile anche da $(*)$)

$$\left(\Rightarrow l_5 = \frac{1}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \cdot r \right)$$



$\overline{OA} = \overline{AC} = r$ $\quad \overline{AB} = l_{10}$

$\overline{OC} = l_5$

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{TC}} = \frac{\overline{TC}}{\overline{BC}}$$

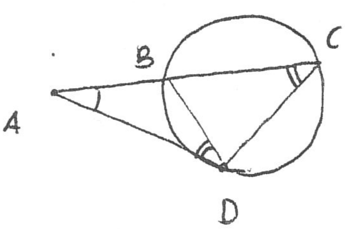
(teorema della tangente - secante$^{(**)}$)

$$l_{10}^2 = r(r - l_{10}) = \overline{TC}^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\overline{TC} = l_{10}}$$

Ma OTC è rettangolo in T, da cui $*$).

(**) Dim

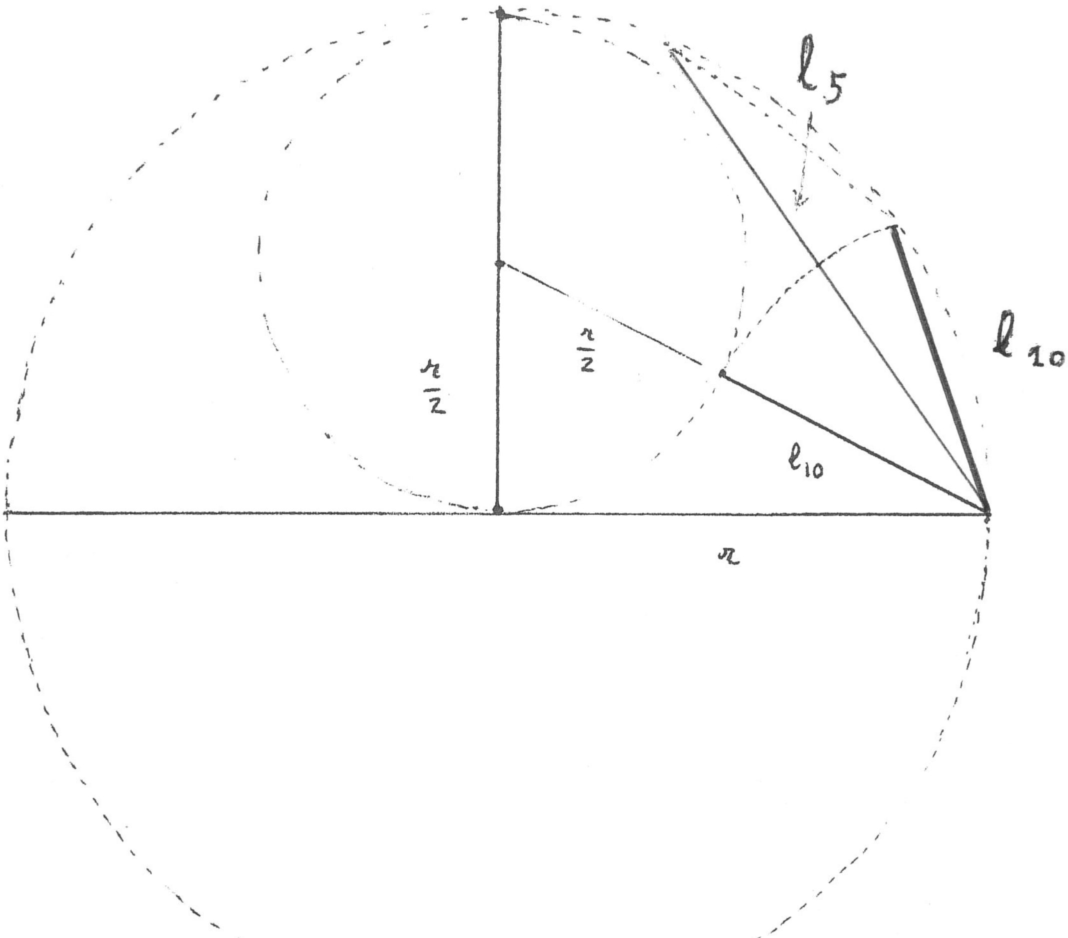


$A\hat{C}D = B\hat{D}A \Rightarrow$

$\overset{\triangle}{ABD}$ e $\overset{\triangle}{ACD}$ sono simili $\Rightarrow$

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}$$

In definitiva, per costruire ℓ_{10} e ℓ_5 possiamo procedere nel modo seguente, molto rapido:

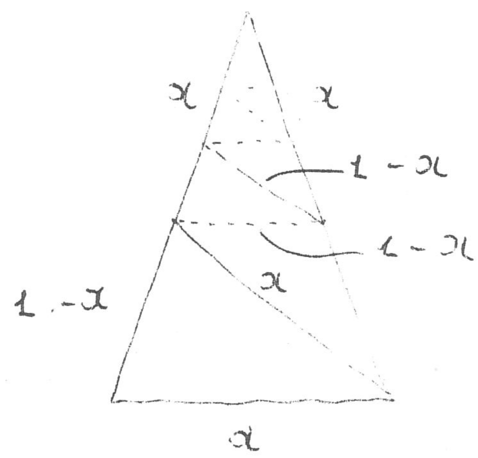


$$\ell_{10} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2} - \frac{r}{2}$$

* Se il lato è dato, si costruisce un poligono simile inscritto in una circonferenza arbitraria, e si effettuano opportuni trasporti di angoli e segmenti (esercizio).

L'irrazionalità della sezione aurea

"more geometrico" $\boxed{x^2 = 1 - x}$



$$A = q_0 \cdot B + R_1$$

$$\boxed{x = 0 \cdot 1 + x}$$

$$B = q_1 R_1 + R_2$$

$$\boxed{1 = 1 \cdot x + 1 - x}$$

$$R_1 = q_2 R_2 + R_3$$

$$x = 1(1-x) + 2x - 1$$

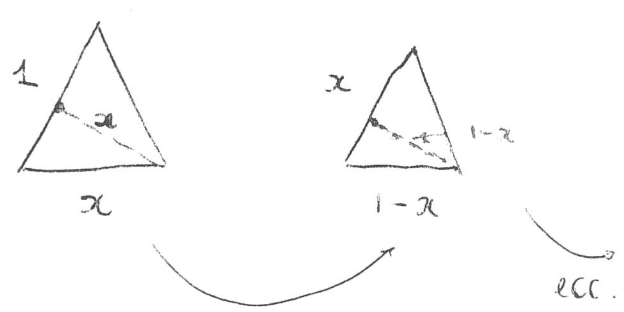
(*) notare l'iterazione della costruzione, che non si arresta

$$x^2 + x - 1 = 0 \qquad x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$x = x_0 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

=> tale irrazionalità si può chiaramente accertare per altra via .. per es attraverso quella di $\sqrt{5}$ ..

(*)



Un'ulteriore riflessione sul concetto di rapporto

In Euclide, hanno dunque un **rapporto** le grandezze "archimedee".

! Il rapporto non è definito direttamente (lo è invece il concetto di proporzione) ancorché ne vengono dedotte le proprietà.

L'algoritmo euclideo fornisce però un'intuizione "dinamica" dello stesso. In linguaggio moderno, $\frac{A}{B}$ "è" la frazione continua che lo rappresenta, che costituisce un analogo dell'antiferesi (o antanairesis) greca (è la procedura formalizzata da Euclide)

[Aristotele: " parallelogrammi [con la stessa altezza] hanno la stessa antanairesis delle basi]

Doveva esistere (Fowler) una teoria pre-euclidea delle proporzioni, fondata sul concetto di antiferesi (antanairesis), cristallizzata nella sintesi euclidea.

Le ridotte della frazione continua costituiscono approssimazioni di un dato rapporto (per noi: numero reale) viepiù precise

Si noti il comparire della dicotomia essere / divenire in matematica Parmenide Eraclito nella forma "invariante"/"algoritmo"

nel presente esempio: rapporto come ente in sé (numero reale) oggi
e come algoritmo che lo individua (algoritmo euclideo)