Prof. M. Spera – UCSC Brescia

★ Solidi platonici

Discussi in Euclide XIII

Lezione XIII

S

vertices V: vertici

edges E: spigoli

faces F: facce

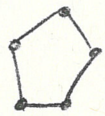
$$\boxed{\text{Euler:} \quad V - E + F = 2}$$

v. oltre per una dimostrazione

m lati $=$ # facce cui il dato vertice appartiene

vertice

N = numero lati di ogni faccia



$m \geq 3$

$$mV = 2E = N \cdot F$$

$$V = \frac{N}{m} F \qquad E = \frac{N}{2} \cdot F$$

$$F \left[1 + \frac{N}{m} - \frac{N}{2} \right] = 2$$

$\Rightarrow$ (moltiplicando ambo i membri per $2m$)

$$(*) \quad \boxed{F\,(2m + \overbrace{2N - mN}^{(2-m)N}) = 4m}$$

$$\Rightarrow \quad 2N - mN + 2m > 0 \qquad N \geq 3$$

$$2m > mN - 2N = (m-2)N \geq 3(m-2)$$

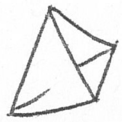
$$\Rightarrow \quad 2m > 3m - 6$$

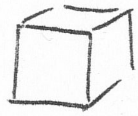
$$\Rightarrow \quad m < 6 \quad \Rightarrow \quad \boxed{3 \leq m \leq 5}$$

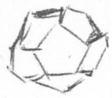
riprendiamo allora (4)

$m = 3 \qquad F\,(6 - N) = 12$

$$\Rightarrow \begin{cases} N = 3 & F = 4 \\ N = 4 & F = 6 \\ N = 5 & F = 12 \end{cases}$$

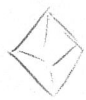

tetraedro


cubo

dodecaedro


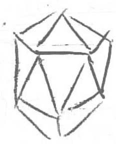
$m = 4 \qquad F\,(8 - 2N) = 16$

$N = 3 \qquad 2F = 16 \qquad F = 8$

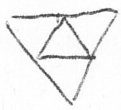
ottaedro


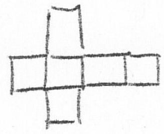
$m = 5 \qquad F\,(10 - 3N) = 20$

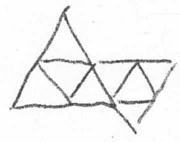
$N = 3 \qquad F = 20$

icosaedro


Solidi platonici : costruzione



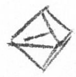


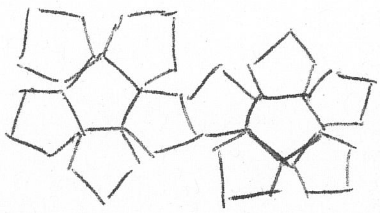


tetraedro

cubo

ottaedro

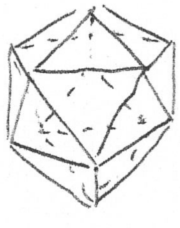


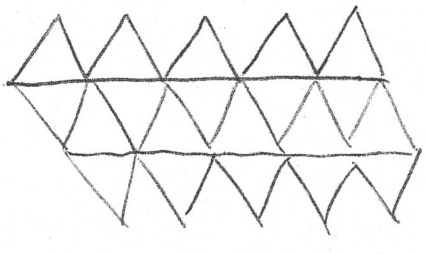


dodecaedro

← Sviluppi

icosaedro

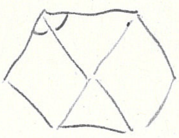




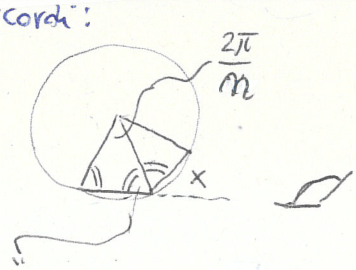
4 Dimostriamo l'unicità dei solidi platonici per via elementare. Ricordiamo che la somma degli angoli di un angoloide è < 4 retti $(= 2\pi)$
vedi oltre per una dimostrazione

★ Intanto, non posso usare poligoni regolari con più di 5 lati: assumendo che m (= # poligoni che insistono su un vertice) è ≥ 3,
= # spigoli uscenti da un vertice

si avrebbe, già per l'esagono $3 \cdot \frac{2\pi}{3} = 2\pi$.



Si ricordi:



$$\pi - \frac{2\pi}{n} = \frac{n-2}{n}\pi$$

triangolo equil.:	$\frac{\pi}{3}$
quadrato:	$\frac{\pi}{2}$
pentagono reg.	$\frac{3}{5}\pi$

- per un pentagono deve essere

$$\frac{9}{5}\pi \leq m \cdot \frac{3}{5}\pi < 2\pi$$

$\Rightarrow \quad m = 3 \quad \rightsquigarrow$ dodecaedro

- per un quadrato

$$\frac{3}{2}\pi \leq m \cdot \frac{\pi}{2} < 2\pi$$

$m = 3$ ok $\quad m \geq 4$ No! $\rightsquigarrow$ cubo

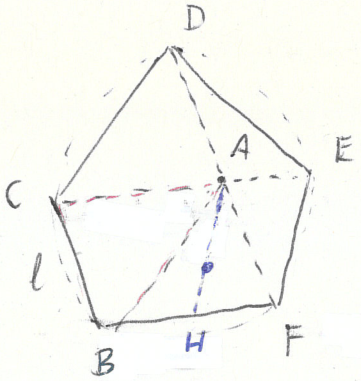
- per un triangolo

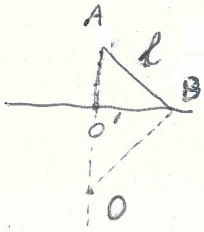
$$\pi \leq m \cdot \frac{\pi}{3} < 2\pi \qquad 1 \leq \frac{m}{3} < 2$$

$\Rightarrow m = 3, \; m = 4, \; m = 5$

tetraedro, ottaedro, icosaedro

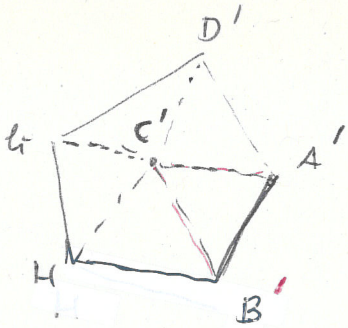
4 Costruzione dell'icosaedro e del dodecaedro (Legendre)



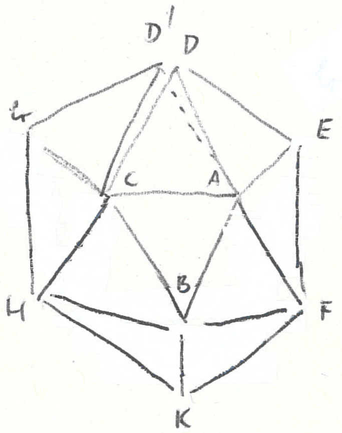


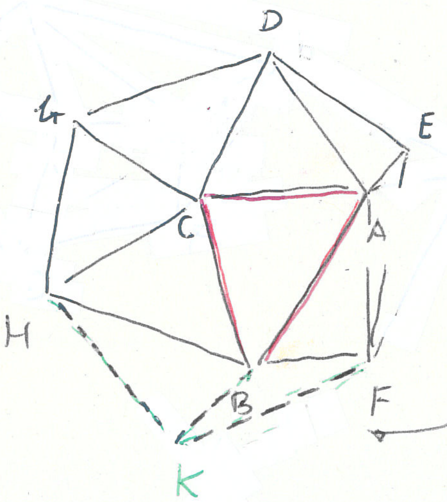
Si parta dal pentagono BCDEF, di lato l, si costruisca, sulla ⊥ per il centro O', A a distanza l da B (A avrà la stessa distanza da C, D, E, F...)

Si ripeta la costruzione



Si incolli A'B'C' su ABC ($\Rightarrow D' \equiv D$)





8 triangoli equilateri, tutti gli angoli diedrali uguali

Si ripeta la procedura

Si ottiene una figura convessa con 10 triangoli (e angoli diedrali uguali)

Quest'ultima figura si può incollare ad una figura uguale, ottenendo un icosaedro

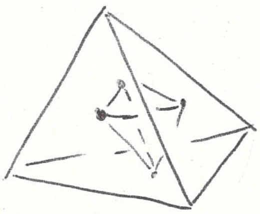
Inoltre i baricentri dei 5 triangoli che insistono su un singolo vertice danno vita ad un pentagono (regolare): i dodici pentagoni così fatti formano un dodecaedro (icosaedro e dodecaedro sono solidi "duali")

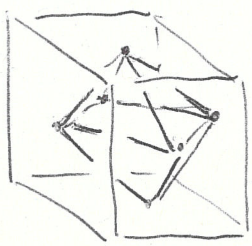
Dualità: i centri delle facce dell'uno sono i vertici dell'altro

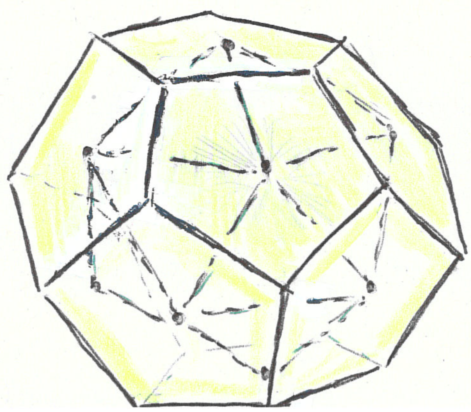
	V	E	F
tetraedro	4	6	4
cubo	8	12	$\boxed{6}$
ottaedro	$\boxed{6}$	12	8
dodecaedro	20	30	$\boxed{12}$
icosaedro	$\boxed{12}$	30	20

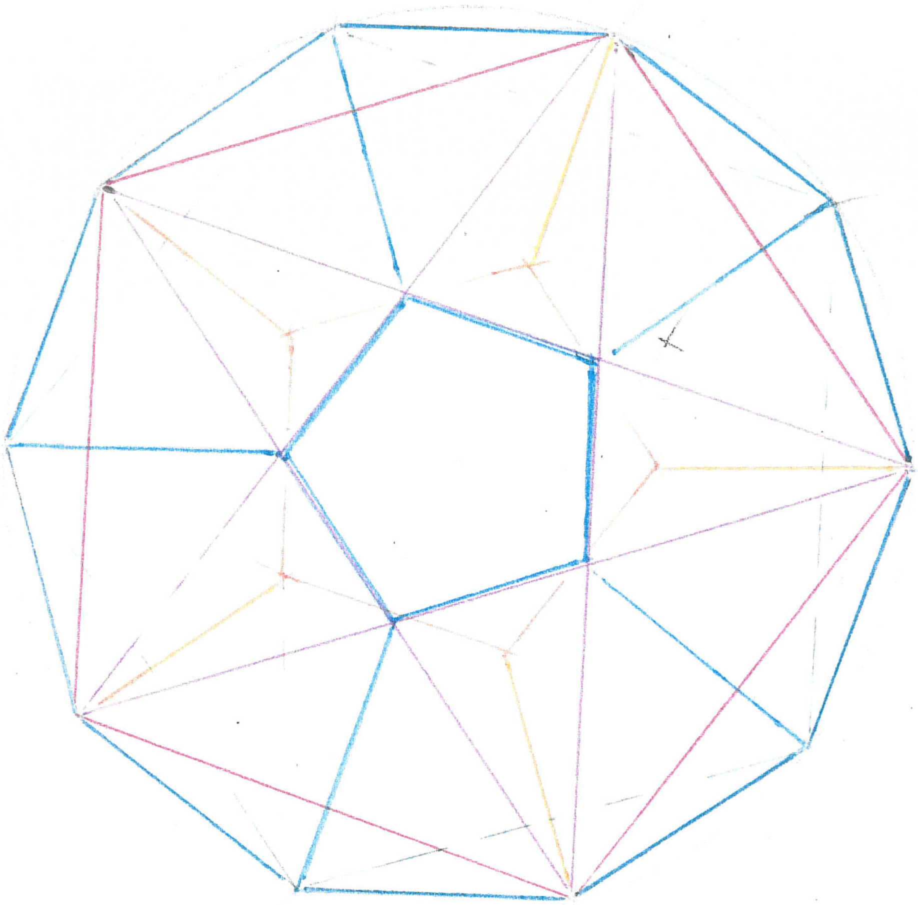
tetraedro ↔ tetraedro
cubo ↔ ottaedro
dodecaedro ↔ icosaedro

$V - E + F = 2$ in ogni caso.

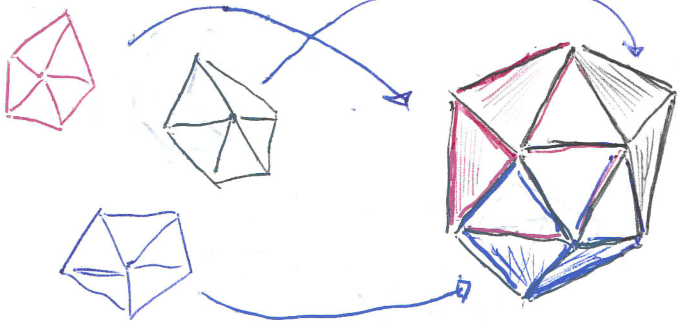








dodecaedro
(azzurro e
giallo)



ancora sulla
costruzione
dell'icosaedro

** Formula di Eulero

Per un poliedro omeomorfo ad una sfera,

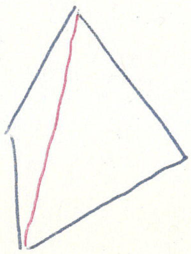
è $\boxed{V - E + F = 2}$

V: # vertici

E: # spigoli (edges)

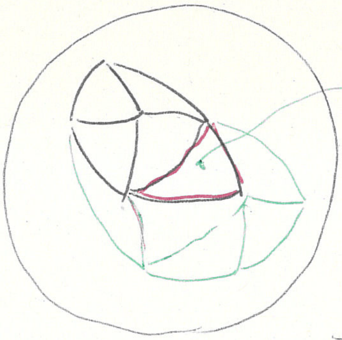
F: # facce

Dim. (Cauchy) Si possono considerare facce triangolari:

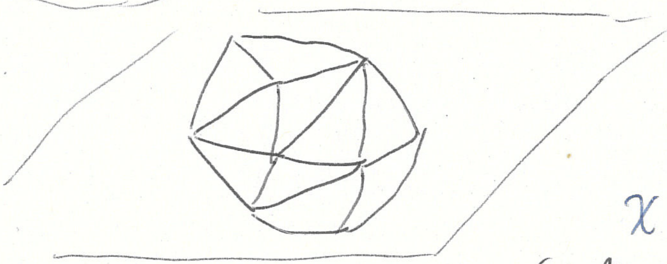


dividendo, ad esempio il quadrilatero in figura in due triangoli, si creano una faccia e uno spigolo, che contribuiscono con segni opposti.

Si può "disporre" il poliedro su di una sfera (i lati si deformano, ma ciò è irrilevante dal pto di vista topologico)



Si rimuova ora un triangolo e si "stenda" tutto su un piano (per es. tramite una proiezione stereografica



rimuovendo un triangolo, si perde una faccia

pertanto la somma

$\chi := V - E + F$ diviene

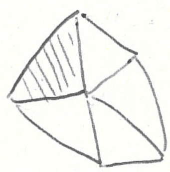
caratteristica di Eulero-Poincaré

$\chi' = \chi - 1$

vogliamo dimostrare che $\chi' = 1$ $(\Rightarrow \chi = 2)$

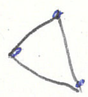
togliendo un triangolo "esternamente",

χ' rimane invariato



(tolgo una faccia e uno spigolo)

Proseguendo, alla fine rimane un solo "triangolo"



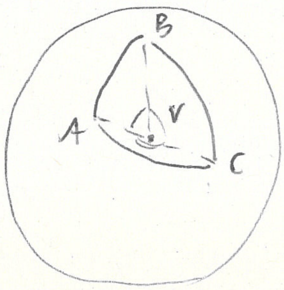
e in questo caso $\chi' = 1$, banalmente.

L'asserto è provato.

Completiamo anche la dimostrazione elementare.

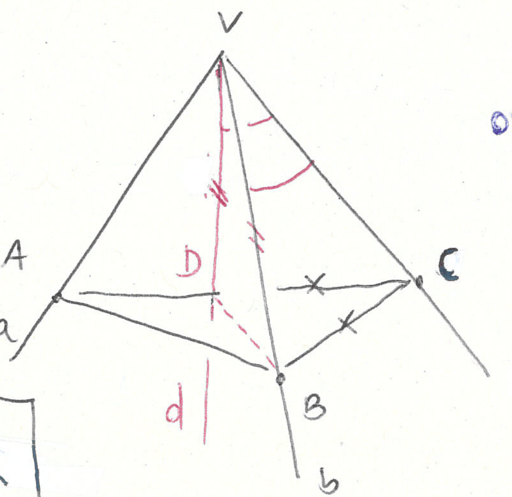
✱ **Teorema** In ogni triedro ogni faccia è minore della somma degli altri due e minore della loro differenza

1ª dim Si lavora su un triangolo sferico (con lati minori di un semicerchio) di centro V.



✱ Valgono i teoremi di Euclide del I° libro fino a I.28 (compreso I.16 ...), considerando come "rette" gli archi di cerchio massimo (purché minori di un semicerchio) e pertanto si ha l'asserto (questo è, di fatto, l'approccio di Menelao, I sec. a.C.)

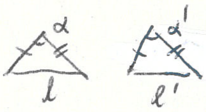
2ª dim ("tradizionale") Basta dimostrare il teorema nel caso in cui $\hat{ac} > \hat{ab}$, $\hat{ac} > \hat{bc}$. Si scelgono A e C.



Sia VD tale che $D\hat{V}C = B\hat{V}C$, ove si scelga B in modo che

$VD = VB$

ora BVC e DVC sono uguali (congr.) per il I° criterio $\Rightarrow BC = DC$



$\alpha > \alpha' \Longleftrightarrow l > l'$

ma in ABC è $AC - BC < AB \Rightarrow AD < AB$

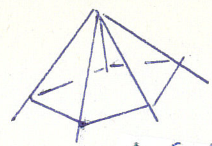
✱ $\Rightarrow$ (I° libro di Euclide) confrontando AVB, AVD (che hanno due lati (VD, VB) uguali e VA in comune, $\hat{ab} > \hat{ad}$ sommando $\hat{dc} = \hat{bc}$ ad ambo i membri è

$$\hat{ad} + \hat{dc} < \hat{ab} + \hat{bc} \Rightarrow \boxed{\hat{ac} < \hat{ab} + \hat{bc}}$$

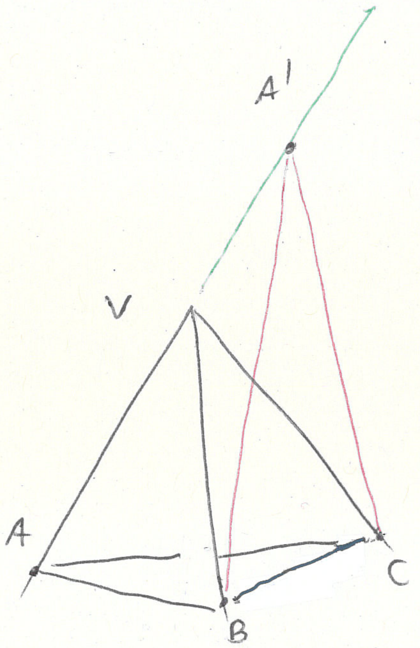
✱ **Proposizione** In ogni angoloide (+) la somma delle facce è < 4 retti

(intendi: gli angoli delle facce...)

è la proposizione fondamentale utilizzata nella classificazione dei solidi platonici

(+)  le cui sezioni con un piano non passante per il vertice diano luogo a poligoni convessi

Dim. Vediamolo per il triedro $\hat{V}ABC$.



Si ha, in $\hat{V}A'BC$

$$\boxed{B\hat{V}C < B\hat{V}A' + C\hat{V}A'}$$

=> (aggiungendo ad ambo i membri $A\hat{V}B + A\hat{V}C$

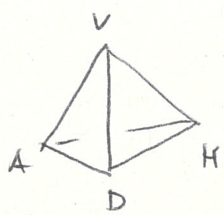
$$A\hat{V}B + A\hat{V}C + B\hat{V}C < \underbrace{B\hat{V}A' + A\hat{V}B}_{2 \text{ retti}} + \underbrace{C\hat{V}A' + A\hat{V}C}_{2 \text{ retti}}$$

=> l'asserto.

Vediamolo per un angoloide a quattro spigoli (per induzione, si avrà il caso generale) con sezioni date da poligoni convessi

Si fissi l'attenzione su $B\hat{V}C$; sia $H = AB \cap DC$

Consideriamo $\hat{V}ADH$



La somma delle facce è < 4 retti e supera quella dell'angoloide iniziale, perché a quest'ultimo, per produrre $\hat{V}ADH$, si aggiungono $C\hat{V}H$ e $B\hat{V}H$, la cui somma supera $B\hat{V}C$. □