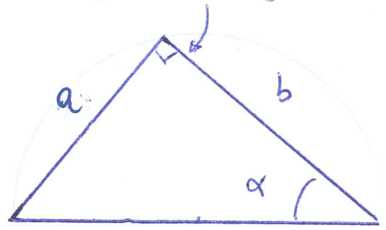
Lezione XIX

V2

Prof. Mauro Spera, UCSC Brescia

*** Teoria delle proporzioni

suppl. 2 ai "Grundlagen"



rapporto di segmenti

$$\frac{a}{b} := \alpha$$

(in Hilbert il rapporto è definito)

proporzione: uguaglianza di due rapporti (nel nostro caso, due angoli)

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{se} \quad \alpha = \beta$$

(β definito in modo ovvio)

valgono la proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva, nonché

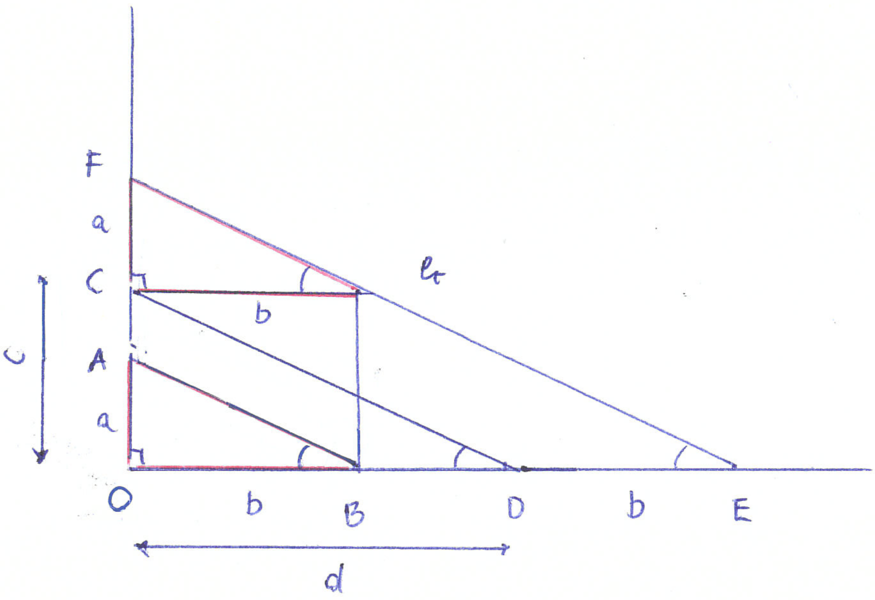
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

(valendo due retti la somma degli angoli interni di un triangolo).

Se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, vale la proprietà del "comporre"

$$\frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d}$$

Verifichiamola:



Sia $DE = b$. Sia $FE \parallel AB$ ($e \parallel CD$) Sia $CG \parallel OE$.

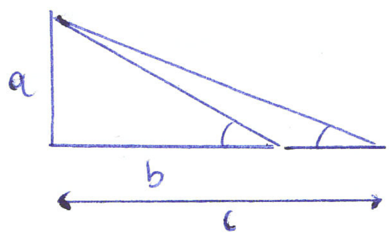
È $CG = b$. I triangoli OAB e CFG sono congruenti (II° criterio) e pertanto $FC = a$. Da ciò segue che se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, allora è pure

$$\boxed{\underbrace{\frac{a+c}{b+d}}_{\text{somma}} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}}$$

[Nota: abbiamo già un caso particolare del teorema di Talete, v. oltre]

Abbiamo utilizzato in particolare III·5 e IV

Si ha pure $\frac{a}{b} = \frac{a}{c} \Rightarrow b = c$



$b \neq c$ è assurda in virtù del teorema dell'angolo esterno

Dal trasporto degli angoli e dal parallelismo
si deduce anche

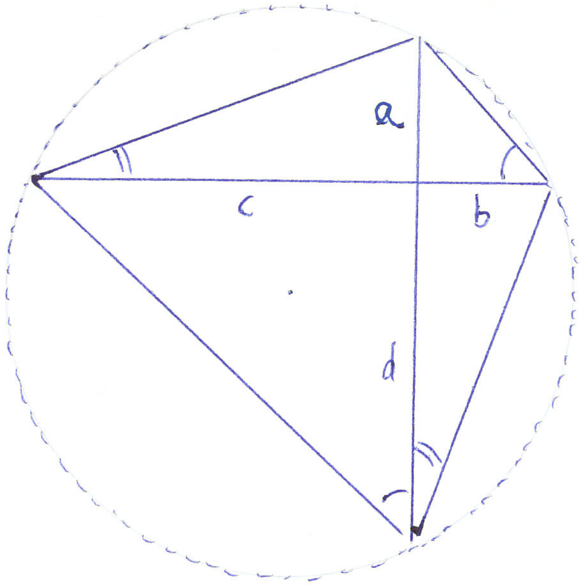
l' esistenza e unicità del quarto proporzionale

dopo tre segmenti dati

vale altresì la permutabilità dei medi

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

(Enriques)



$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \triangle$$

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \triangle$$

e $\triangle = \triangle$ ...

Valgono poi i seguenti fatti:

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \ , \ \frac{b}{c} = \frac{b'}{c'} \ \Rightarrow \ \frac{a}{c} = \frac{a'}{c'}}$$

Dalle prime due uguaglianze si ha $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$, $\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

(permutando i medi), e dunque $\frac{a}{a'} = \frac{c}{c'}$ e

$$\frac{a}{c} = \frac{a'}{c}$$

formalmente
$$\frac{a'}{\cancel{b'}} \frac{\cancel{b'}}{c'} = \frac{a'}{c'}$$

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{b'}{a'} \ , \ \frac{b}{c} = \frac{c'}{b'} \ \Rightarrow \ \frac{a}{c} = \frac{c'}{a'}}$$

formalmente
$$\frac{\cancel{b'}}{a'} \cdot \frac{c'}{\cancel{b'}} = \frac{c'}{a'}$$

è <u>diversa</u> dalla prec

Si usa l'esistenza del <u>quarto</u> <u>proporzionale</u>

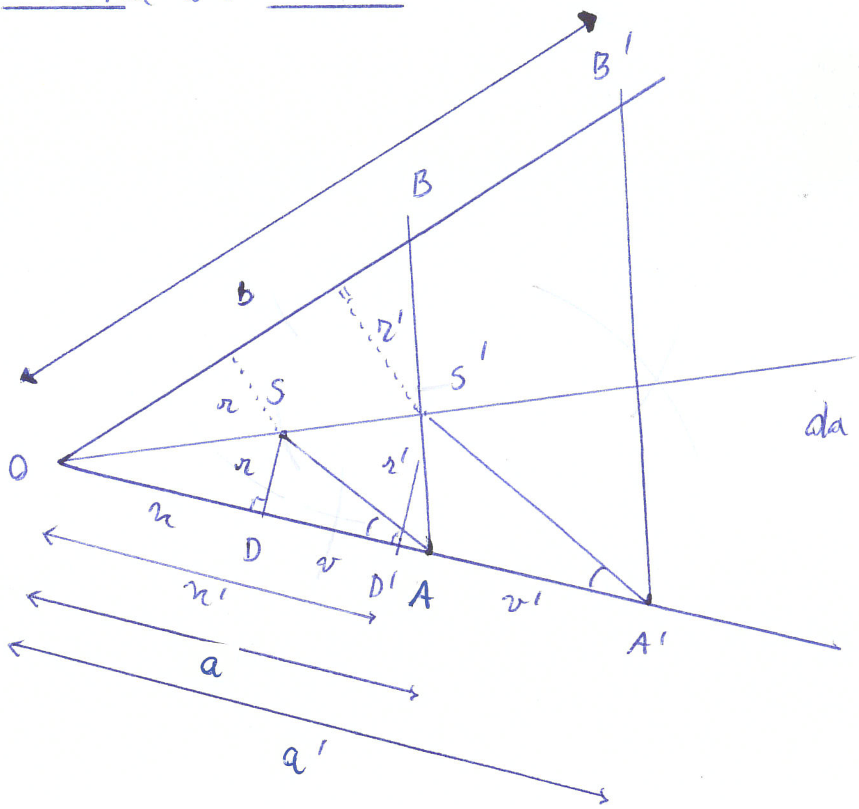
Sia $\frac{a}{b} = \frac{c'}{x}$ $\quad \frac{c'}{x} = \frac{b'}{a'} \Rightarrow \frac{c'}{b'} = \frac{x}{a'} = \frac{b}{c}$

quarto prop.

Dunque: $\frac{c'}{x} = \frac{a}{b}$, $\frac{x}{a'} = \frac{b}{c}$

Ma allora, per la regola precedente, $\frac{c'}{a'} = \frac{a}{c}$

Teorema di Talete



$\boxed{AB \parallel A'B'}$

S, S' incentri di OAB, $OA'B'$ risp.

da dimostrare:

$$\boxed{\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}}$$

(è facile provare anche l'inverso)

Dimostriamo che $\frac{a}{a'} = \frac{r}{r'}$ $(SD \perp OA\ ,\ S'D' \perp OA)$

ciò basterà per concludere.

$OD = x \quad OD' = x'$

$DA = v \quad D'A' = v'$

$$S\hat{A}O = S'\hat{A}'O$$

$$\frac{r}{x} = S\hat{O}A = S'\hat{O}A' = \frac{r'}{x'}$$

$$\frac{r}{v} = S\hat{A}O = S'\hat{A}'O = \frac{r'}{v'}$$

$$\frac{r}{r'} = \frac{x}{x'} = \frac{v}{v'} = \frac{x+v}{x'+v'} = \frac{a}{a'}$$

comporre

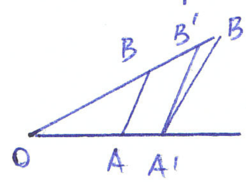
$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \Rightarrow AB \parallel A'B'$

Se così non fosse, sia $A'B'' \parallel AB$.

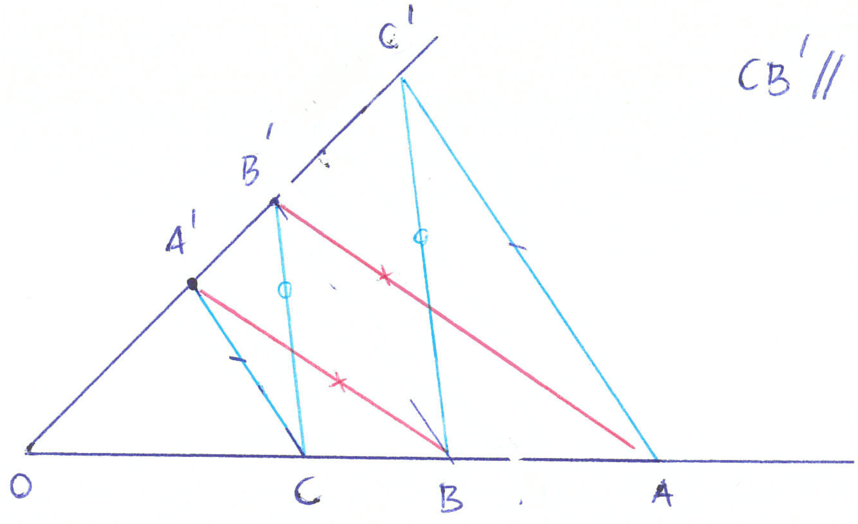
Si avrebbe allora

$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b''} \Rightarrow b'' = b'$

contro l'ipotesi



*** Teorema di Pappo (-Pascal)



$CB' \parallel BC'$ e $CA' \parallel AC'$

$\Downarrow$

$BA' \parallel AB'$

Dim. Posto $OA = a$, $OA = a'$ ecc., l'assunzione diventa $\dfrac{b}{c} = \dfrac{c'}{b'}$, $\dfrac{c}{a} = \dfrac{a'}{c'}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{a}{b} = \dfrac{b'}{a'}$ (Talete e inverso) che è stata provata dianzi.

Si confronti col teorema di Pappo generale:

Nell'unica proiettività $A \mapsto A'$, $B \mapsto B'$, $C \mapsto C'$, i pti $CB' \cap C'B$, $CA' \cap C'A$, $AB' \cap BA'$ sono allineati, e se i primi due si trovano sulla retta impropria (parallelismo), lo stesso accade al terzo.

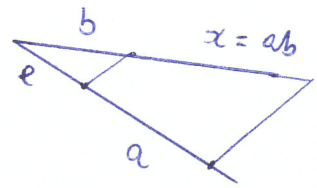
4 Costruzione del campo dei segmenti
("coordinatizzazione" della geometria)

Sia e un segmento fissato, preso come unità

Definiamo la moltiplicazione di segmenti

$a \cdot b :=$ quarto proporzionale dopo e, a, b

$x = a \cdot b \qquad \dfrac{e}{a} = \dfrac{b}{x}$



"$\cdot$" è commutativa (permutabilità dei medi)

"$\cdot$" è associativa $(ab)c = a(bc)$

verifichiamo che, posto $u = ab$, $v = bc$ $w = (ab)c$

$$\frac{e}{a} = \frac{b}{u}, \quad \frac{e}{b} = \frac{c}{v}, \quad \frac{e}{u} = \frac{c}{w} \Rightarrow \frac{e}{a} = \frac{v}{w} \qquad (*)$$

Notiamo che $\dfrac{e}{a} = \dfrac{v}{w}$ significa $w = av$ ossia

$(ab)c = a(bc)$

Proviamo $(*)$. Da $\dfrac{b}{e} = \dfrac{v}{c}$ e $\dfrac{e}{u} = \dfrac{c}{w}$ si ha $\dfrac{b}{u} = \dfrac{v}{w} = \dfrac{e}{a}$

"$\cdot$" è distributiva rispetto a "+"

$$\frac{e}{a} = \frac{b}{x} \qquad \frac{e}{a} = \frac{c}{v} \quad \Rightarrow \quad \frac{e}{a} = \frac{b+c}{x+v}$$

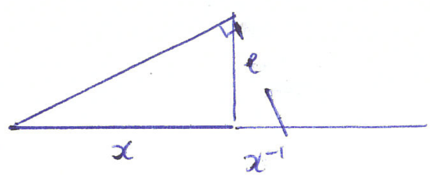
$x = ab \qquad v = ac$

che è chiara: $\frac{e}{a} = \frac{b+c}{ab+ac} \qquad a(b+c) = ab+ac$

segmento nullo: AA.

costruiamo l'<u>inverso</u> del segmento $x \neq 0$

(cf. Cartesio)



$$\frac{x}{e} = \frac{e}{x} \qquad x = x^{-1}$$

("II° teorema di Euclide")

Il tutto si può <u>algebrizzare</u> a partire dall'ovvia definizione di <u>opposto</u> di un segmento

pervenendo infine al <u>campo</u> <u>dei segmenti</u>, che ne permette il relativo <u>calcolo</u>.