V2

MATEMATICHE COMPLEMENTARI II

Prof. Mauro SPERA, UCSC Brescia

Lezione XV

I "Grundlagen" di Hilbert (I)

I "Grundlagen der Geometrie" di D. Hilbert (1899) rifondano su nuove basi la geometria euclidea, esplicitando assunzioni nascoste in quest'ultima, e rendendo più rigorosi alcuni teoremi (in ogni caso, non vi sono "errori" nella geometria euclidea, che mantiene un ruolo insostituibile, in particolar modo nella didattica.

◆ Assiomi di Hilbert

sistemi di oggetti

concetti primitivi

- punti $A, B, C \ldots$
- rette $a, b, c \ldots$
- piani $\alpha, \beta, \gamma \ldots$

- punti: elementi della geometria della retta
- punti e rette: elementi della geometria piana
- punti, rette e piani: elementi della geometria solida (o dello spazio)

Le relazioni tra i vari oggetti sono stabilite tramite assiomi, suddivisi in cinque gruppi

I	1 – 8	assiomi di collegamento
II	1 – 4	" " ordinamento
III	1 – 5	" " congruenza
IV		assioma delle parallele
V	1 – 2	assiomi di continuità

- La coerenza del sistema di assiomi si stabilisce tramite un modello aritmetico [in ogni caso, attraverso un'altra teoria]
- L'indipendenza del detto sistema si stabilisce costruendo modelli successivi in cui valgono tutti gli assiomi precedenti tranne l'ultimo.

Assiomi di collegamento

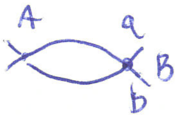
assiomi piani

I.1 Per due punti A, B <u>c'è</u> sempre una retta a che <u>appartiene</u> ad ognuno di due punti A, B

concetto primitivo

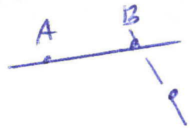
Si dice poi: A, B giacciono (o stanno) su a, a passa per A ecc.

I.2 Per due punti A, B c'è <u>al massimo</u> una retta a che appartiene ad A e B



No! [Cf. Euclide: non è possibile "racchiudere uno spazio"]

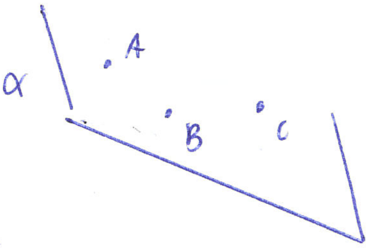
I.3 Su una retta ci sono <u>almeno</u> <u>due pti</u>.
E ci sono almeno <u>tre</u> punti che non giacciono su una retta

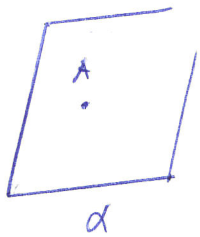


assiomi spaziali

I.4 Per tre pti qualsiasi A, B, C che non giacciono su una retta (non allineati), c'è sempre un piano α che <u>appartiene</u> ad ognuno dei <u>tre</u> punti
Per ogni piano <u>c'è</u> sempre un <u>punto</u> che gli <u>appartiene</u>

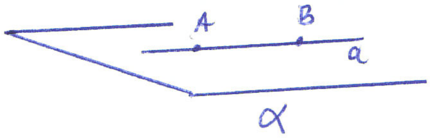
Locuzioni: A giace su α, A è un pto di α ...





I.5 Per tre punti A, B, C <u>non</u> <u>allineati</u>, c'è al <u>massimo</u> <u>un piano</u> che <u>appartiene</u> a ciascuno di essi

I.6 Se A, B sono pti di una retta a e giacciono su un piano α, allora ogni punto di a è nel piano α (la retta a è contenuta nel piano α, giace nel piano α)



[Nel seguito utilizzeremo liberamente la notazione insiemistica]

I.7 Se due piani α e β hanno in comune un punto A, allora hanno in comune almeno un altro punto B.

"lo spazio ha al più tre dimensioni"

I.8 Ci sono almeno quattro punti che non stanno su un piano (non complanari)

"lo spazio ha almeno tre dimensioni"

"lo spazio ha esattamente tre dimensioni"

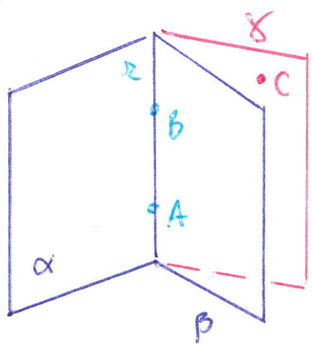
assiomi spaziali (seguito)

Conseguenze di I.1 — I.8

1. Due rette (distinte) complanari o hanno un punto in comune o non ne hanno.

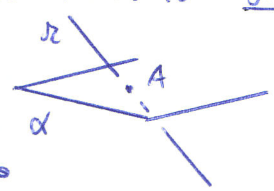
Dim. Se non vale la seconda ipotesi, e se avessero un ulteriore pto in comune, dovrebbero coincidere

2. Due piani α, β o non hanno punti in comune o hanno in comune una retta, e nessun altro punto fuori di essa.

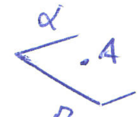


Dim. Se non vale la prima ipotesi, $\exists\, A \in \alpha \cap \beta$ e, per I.7, $\exists\, B \neq A$, $B \in \alpha \cap \beta$. La retta $r = AB$ (l'unica retta per A e B) è allora contenuta in entrambi i piani (I.6). Se esistesse $C \in \alpha \cap \beta$, $C \notin r$, il piano $\gamma = ABC$ dovrebbe coincidere sia con α sia con β, il che è assurdo poiché α e β sono distinti.

3. Un piano e una retta, che non giaccia su di esso, o non hanno punti in comune o ne hanno esattamente uno.

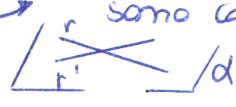


Dim. Se non vale la prima ipotesi, r e α (v. figura) hanno un punto in comune (A) ma nessun'altro, in virtù di I.6



★ $\exists!\ \alpha \supset r$ e $\alpha \ni A$, $A \notin r$

★ Due rette incidenti sono complanari



Esercizi

Assiomi di ordinamento

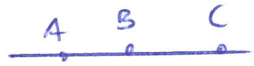
non evidenziati da Euclide

cf. Pasch (1882)

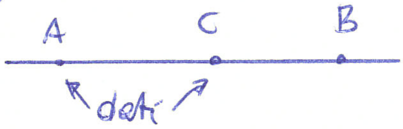
concetto di "fra" ("tra")

assiomi lineari di ordinamento

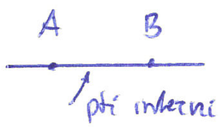
II 1 Se B giace tra A e C, allora A, B, C sono punti (distinti) di una retta, e B giace tra C ed A



II 2 Dati A e C sulla retta AC, c'è almeno un pto B sulla stessa retta tale che C giaccia tra A e B



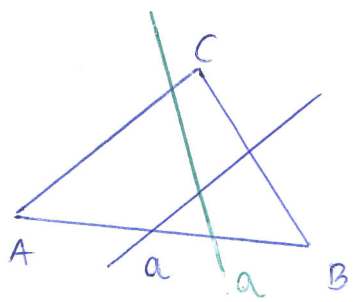
II 3 Di tre punti qualsiasi di una retta, ce n'è al massimo uno che giace tra gli altri due



Per segmento AB (oppure BA) si intende il sistema dei due punti. I punti tra A e B sono i punti del segmento AB ("posti all'interno di AB). I punti rimanenti si dicono esterni ad AB o posti all'esterno di AB. Dimostreremo che AB contiene pti interni

II 4 Assioma primo di ordinamento (assioma di PASCH)

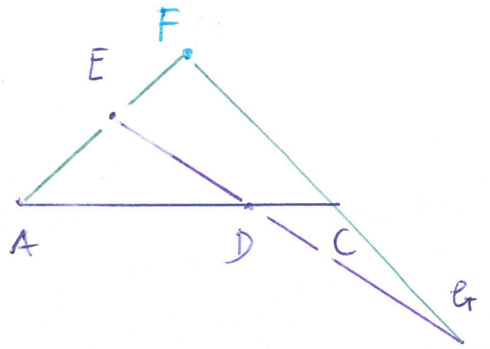
Siano A, B, C tre punti non allineati e a una retta che non passi per alcuno dei tre pti. Allora, se a passa per un punto di AB, passa certamente anche per un punto di AC oppure di BC [se una retta entra in un triangolo ne esce pure]



Dimostreremo tra breve che a non può tagliare contemporaneamente AC e BC

Si ha l'importantissimo

Teorema Tra due pti A e C c'è sempre almeno un punto D su AC che giace tra A e C (ovvero, un punto D all'interno del segmento AC)



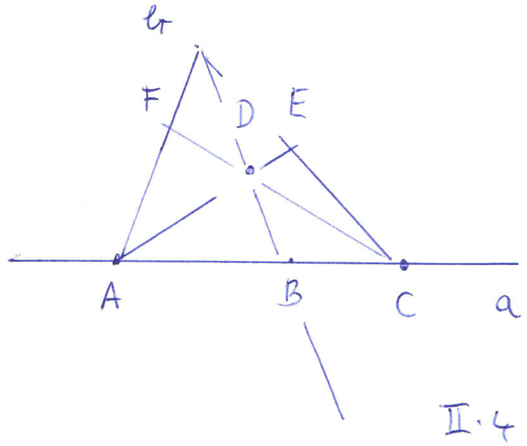
Dim. In virtù di I.3 esiste E esterno alla retta AC, e per II.2 esiste F su AE tale che E stia tra A ed F. Per II.2 esiste G su FC con C tra F e G (e solo C può trovarsi tra F e G, in base a II.3).

La retta EG passa per E, interno ad AF e dunque deve incontrare AC in D (Pasch). Notiamo che EG non può uscire dal lato FC perchè G è esterno ad esso. □

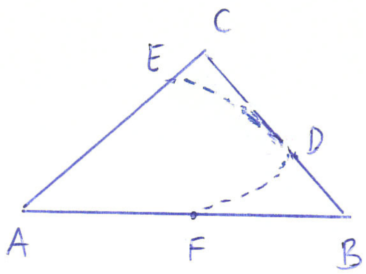
Inoltre:

Teorema Di tre punti di una retta, A, B, C, ce ne è sempre uno che giace tra gli altri due

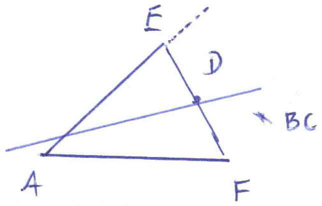
Dim. Supponiamo che A non stia tra B e C, né C tra A e B. Facciamo vedere che B sta tra A e C. Sia $D \notin a$ e G su BD tale che D stia tra G e B. Applicando II.4 a BCG e AD, si trova $E = GC \cap AD$. Similmente si determina $F \in AG$. Si applichi poi II.4 ad AEG e a CF: D sta allora tra G e B. Ancora per II.4 applicato ad AEC, si ha che B giace tra A e C

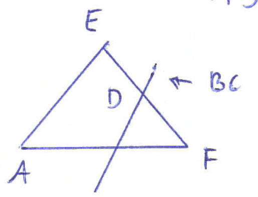


Come anticipato, una retta <u>non può tagliare tutti e tre i lati di un triangolo</u>

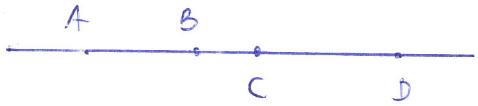


Se D, per fissare le idee, fosse tra E ed F applicando II.4 ad AEF e a BC, quest'ultima dovrebbe passare per un pto di AE oppure AF, e dovrebbe pertanto coincidere con AC o AB, e ciò è assurdo





Dati <u>quattro pti</u> di una retta, essi si possono sempre denotare con A, B, C, D in modo che B stia tra A e C e A e D, e C stia tra tra A e D e B e D

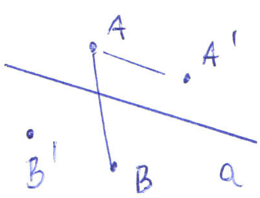


Ciò si generalizza a n pti arbitrari $A_1 \dots A_n$, dando vita a due <u>ordinamenti</u> su una retta.

☆ Ulteriori <u>conseguente</u>

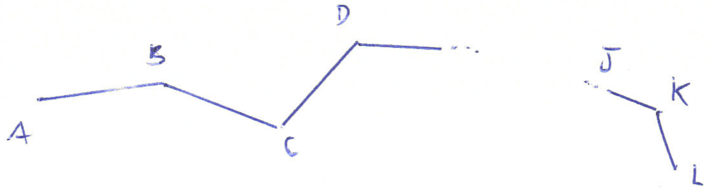
- Tra due pti di una retta si trovano <u>infiniti</u> punti (chiaro)

- Ogni retta a di un piano α divide questo in due regioni R_1, R_2 (semipiani) con le seguenti proprietà: se $A \in R_1$, $B \in R_2$ allora $AB \ni P \in a$, se $A, A' \in R_1$, $B, B' \in R_2$, AA' e BB' non incontrano a



si dice allora che A, A', e B, B', stanno dalla stessa parte di a, A, B da parti opposte

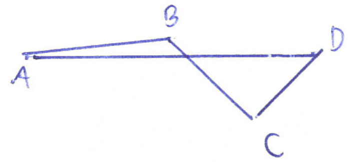
Si introduce in modo naturale il concetto di spezzata ("sistema" di segmenti AB, BC, ... JK, KL)



notazione:
ABC...KL

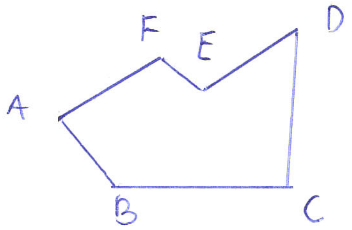
A, B, C: vertici della spezzata, AB, BC.. lati

Se i punti sono complanari e L = A, si parla di poligono

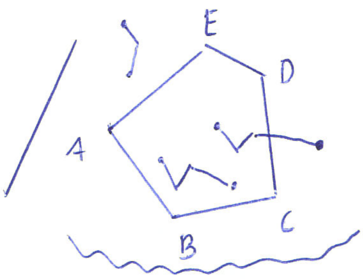


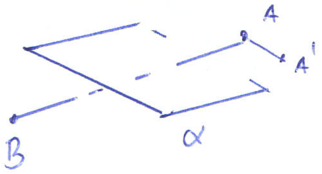
es: ABCDA

Si ha poi un poligono semplice se i vertici sono distinti, nessun vertice è interno ad un lato e ogni coppia di lati non ha pti in comune (eccettuati al più gli estremi)



Un poligono semplice divide il piano α in cui giace in due regioni (interna ed esterna) con le seguenti proprietà: ogni spezzata congiungente regioni distinte attraversa il poligono, ed esistono spezzate congiungenti due pti della stessa regione che non hanno pti in comune col poligono. Nella regione esterna esistono rette che non hanno pti in comune con il poligono, in quella interna no.





Infine, si ha l'importante teorema: ogni piano divide i rimanenti pti dello spazio in due regioni tali che, se A, B appartengono a regioni differenti, AB incontra α, mentre due pti di una stessa regione definiscono un segmento che non contiene pti di α