* geometria hilbertiana

V2

MATEMATICHE COMPLEMENTARI II

Prof. Marco SPERA, UCSC

Assiomi di congruenza

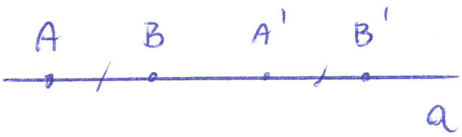
Lezione XVI

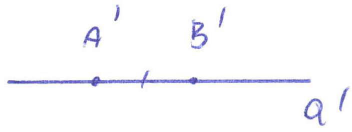
(del terzo gruppo)

"congruente", "uguale"

assiomi lineari di congruenza (congruenza di segmenti)

III 1





Dati $A, B \in a$ (retta) e $A' \in a$ oppure $A' \in a'$ (un'altra retta)

esiste B', da una data parte rispetto ad A'

tale che $AB \equiv A'B'$ (AB congruente ad $A'B'$) uguale

simbolo di congruenza

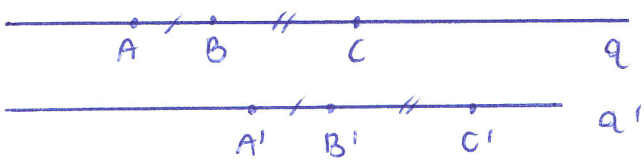
viene cioè postulata l'esistenza del trasporto dei segmenti (si prescinde dall'ordine. L'unicità è dimostrabile v. oltre)

III 2 Segmenti congruenti ad un terzo sono congruenti fra loro (proprietà transitiva di $\equiv$)

Da III 1 e III 2 discende che $AB \equiv AB$ ($\equiv$ è riflessiva)

$\Rightarrow$ $\equiv$ è una relazione di equivalenza

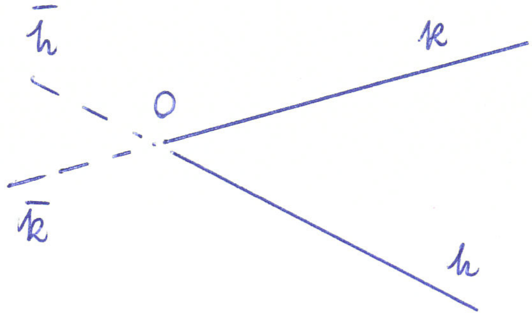
III 3 (addizionabilità dei segmenti)



Se $AB \equiv A'B'$, $BC \equiv B'C'$, allora $AC \equiv A'C'$

Diamo ora la nozione di <u>angolo</u>

sia dato un piano

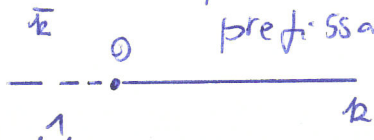


Siano k e h

due <u>semirette</u> uscenti

dallo stesso <u>vertice O</u>

(k : punti di una retta $\bar{k}$ dalla stessa parte di un pto prefissato O ecc)

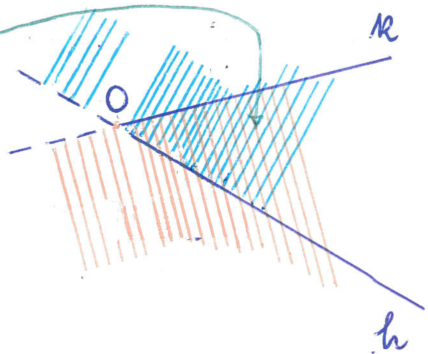


Per angolo si intende il "sistema" di due tali semirette ; notazione

$\widehat{hk}$, $\widehat{kh}$ $\qquad$ h, k : <u>lati</u> di $\widehat{hk}$

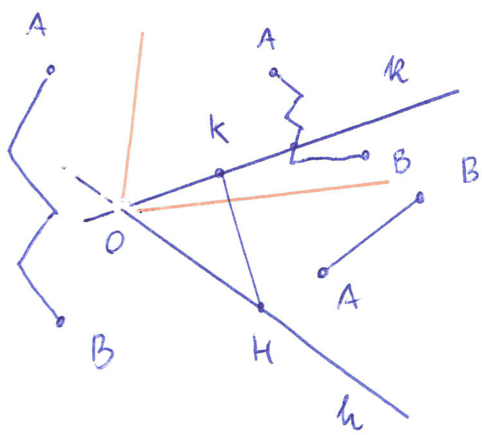
O : <u>vertice</u> di $\widehat{hk}$

I <u>punti interni</u> dell'angolo $\widehat{kh}$ sono i pti che con h, sono dalla stessa parte di $\bar{k}$ (la retta che contiene k) e, con k, dalla stessa parte di $\bar{h}$



In tal modo vengono esclusi gli angoli <u>piatti</u> o <u>concavi</u>

I rimanenti punti vengono detti <u>esterni</u> all'angolo



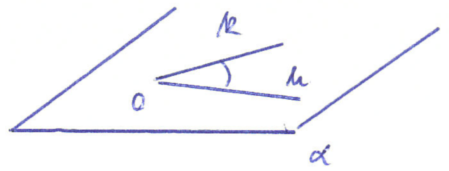
- Entrambe le regioni (dei pti interni ed esterni) possiedono punti.
- un segmento che congiunge pti interni all'angolo è interamente nell'angolo
- Se $K \in k$, $H \in h$, KH è interno all'angolo
- una semiretta uscente da O è tutta interna o esterna all'angolo
- spezzate congiungenti A esterno a B interno o passano per O o per un pto di k o h
- esistono spezzate congiungenti pti della stessa regione che non passano né per O né per h o k

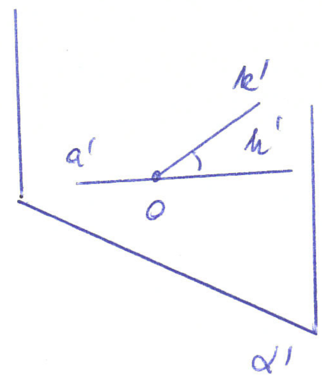
assiomi piani del terzo gruppo

III 4 (trasporto dell'angolo: si postula esistenza e unicità)

congruenza di angoli

simbolo: $\equiv$

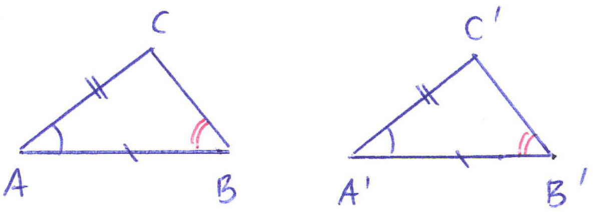




Sia dato un piano α e, in esso un angolo $\widehat{hk}$ e una retta $a' \subset \alpha'$, e un lato di a' (un semipiano individuato da a'). Sia h' una semiretta della retta a', di origine O. Allora esiste una e una sola semiretta k', di origine O, tale che $\widehat{hk} \equiv \widehat{h'k'}$, con tutti i punti interni di $\widehat{h'k'}$ dalla stessa parte di a'. Si postula altresì che $\widehat{hk} \equiv \widehat{hk}$

L'ordine di k e h è irrilevante: $\widehat{hk} \equiv \widehat{kh}$

III 5



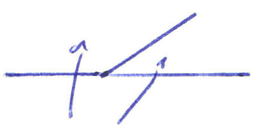
$$\left.\begin{array}{l} AB \equiv A'B' \\ AC \equiv A'C' \\ \hat{A} = \hat{A}' \end{array}\right. \Rightarrow \hat{B} = \hat{B}'$$

(è "quasi" il I° criterio)

◆ ◆ ◆

Di seguito recuperiamo i teoremi fondamentali della geometria euclidea: criteri di congruenza dei triangoli, teorema dell'angolo esterno...

condizioni sufficienti per la congruenza dei triangoli



angoli adiacenti

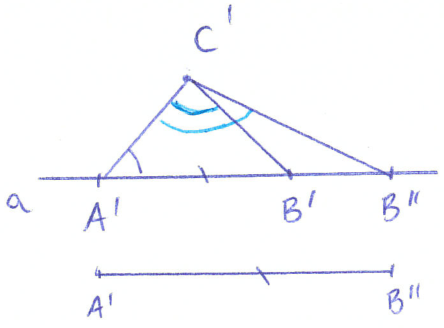
Un angolo è detto retto se è uguale ad uno dei suoi adiacenti (come in Euclide). Dimostreremo l'esistenza di angoli retti

* Due triangoli si dicono congruenti se hanno ordinatamente congruenti i lati e gli angoli

★ **Teorema**: sussiste l'unicità del trasporto dei segmenti

Dim.

Se  potesse essere trasportato in due modi su una retta a, scelto $C' \notin a$, si avrebbe $A'B' \equiv A'B''$, $B'\hat{A}'C \equiv B''\hat{A}'C'$

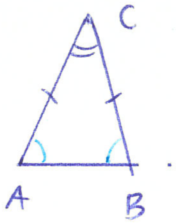


$A'C' \equiv A'C' \implies$ (III.5)

$A'\hat{C}'B' \equiv A'\hat{C}'B''$,

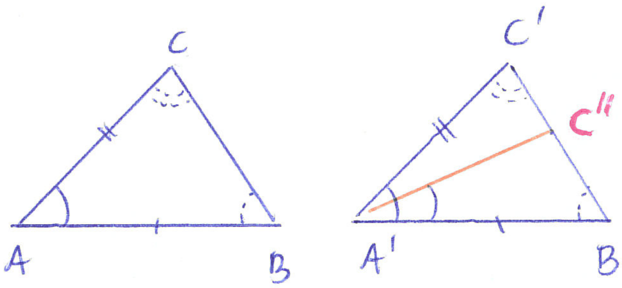
in contrasto con l'unicità del trasporto degli angoli.

★ In un triangolo isoscele gli angoli alla base sono uguali (congruenti)
("pons asinorum")



E' essenzialmente l'argomento di Pappo
$A\hat{C}B \equiv B\hat{C}A$, $AC \equiv CB \implies$ (III.5) $C\hat{A}B \equiv C\hat{B}A$

★ I° criterio di congruenza dei triangoli

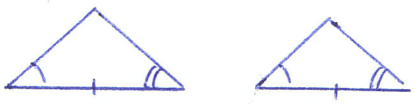


$AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$,
$\hat{A} = \hat{A}' \implies ABC \equiv A'B'C'$

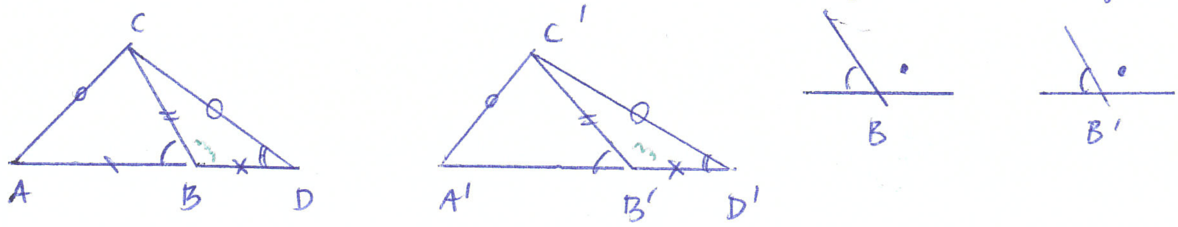
Dim. Da III.5 segue che
$\hat{B} \equiv \hat{B}'$, $C \equiv \hat{C}'$.

Rimane solo da dimostrare che $BC \equiv B'C'$. Se così non fosse, sia, per fissare le idee, $BC \equiv B'C''$. Applicando ancora III.5 ad ABC, $A'B'C''$, si avrebbe $B\hat{A}C = B'\hat{A}'C' = B'\hat{A}'C''$, che non è possibile per l'unicità del trasporto degli angoli.

Analogamente si dimostra il II° criterio nel primo caso

 ( segue da risultati successivi)

4 <u>Teorema</u> Angoli <u>adiacenti</u> ad angoli uguali sono uguali



Se $A\hat{B}C = A'\hat{B}'C'$, allora $C\hat{B}D = C'\hat{B}'D'$ (scriviamo $=$ al posto di $\equiv$)

Poniamoci nella situazione in figura (si scelgano A, A' con $AB = A'B$, C, C' con $CB = C'B'$).

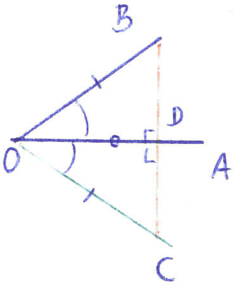
Si ha subito $ABC \equiv A'B'C'$ (I° criterio) $\Rightarrow \hat{A} = \hat{A}'$, $AC = A'C'$. In virtù dell'assioma III.3 si ha pure $AD = A'D'$, sicché (I° criterio) $ACD \equiv A'C'D'$

$\Rightarrow CD = C'D'$, $\hat{D} = \hat{D}'$ $\Rightarrow BDC \equiv B'D'C' \Rightarrow C\hat{B}D = C'\hat{B}'D'$. □

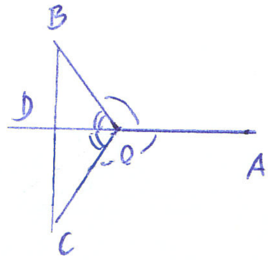
Si deduce così facilmente che

• angoli <u>opposti al vertice</u> sono <u>uguali</u> (chiaro)

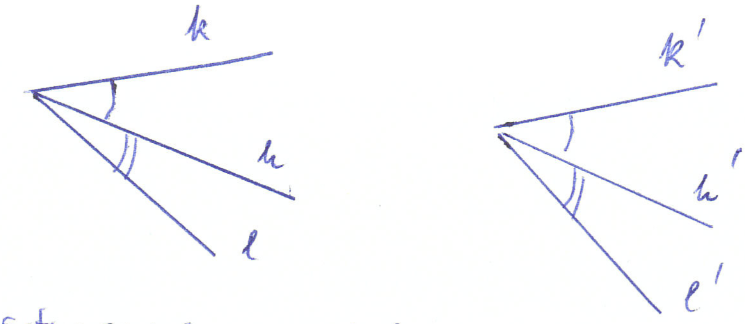
e che • $\boxed{\text{esistono angoli retti}}$



Infatti si prenda $A\hat{O}B$ qualsiasi, e si trasporti l'angolo nel modo indicato (e sia $OB = OC$). BC incontra OA in un pto D. Se $D = O$ abbiamo finito. Se ci troviamo nella situazione in figura (D dalla stessa parte di A rispetto ad O) dal primo criterio (o, anche, solo da III.5) segue che $B\hat{D}O = C\hat{D}O$, ossia la tesi.



Nella situazione della figura accanto (D dalla parte opposta di A rispetto ad O) basta applicare il risultato precedente, e ci si riconduce al primo caso.

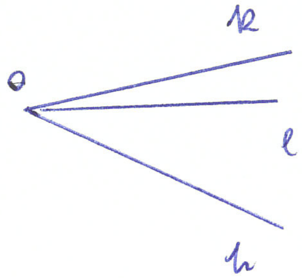
• 

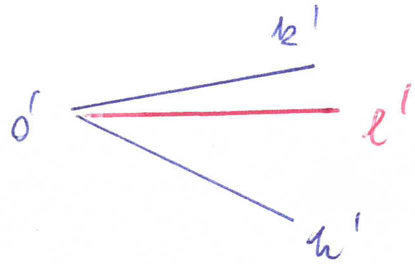
In tutte le situazioni possibili

$$\widehat{hl} = \widehat{h'l'}\ ,\quad \widehat{kl} = \widehat{k'l'} \quad \Rightarrow \quad \widehat{kh} = \widehat{k'h'}$$

("addizionabilità degli angoli")

• Analogamente, dati





$\exists !\ l'$ tale che $\widehat{hl} = \widehat{h'l'}$

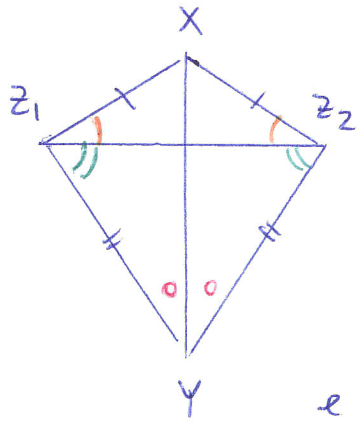
$\widehat{kl} = \widehat{k'l'}$

Sussiste poi l'importante

★ <u>Teorema</u> ("dell'aquilone")

Sia (v. figura) $XZ_1 = XZ_2$,

$Z_1Y = Z_2Y$



Allora $Z_1\hat{Y}X = Z_2\hat{Y}X$

(e anche $Z_1\hat{X}Y = Z_2\hat{X}Y$)

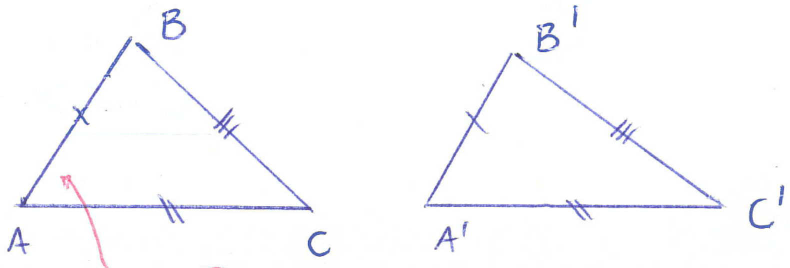
<u>Dim.</u> Si ha $X\hat{Z}_1Z_2 = X\hat{Z}_2Z_1$ ("pons asinorum") e così $Y\hat{Z}_1Z_2 = Y\hat{Z}_2Z_1$ e pertanto $X\hat{Z}_1Y = X\hat{Z}_2Y$.

- Dalla congruenza dei triangoli XZ_1Y e XZ_2Y (I° criterio) segue la tesi.

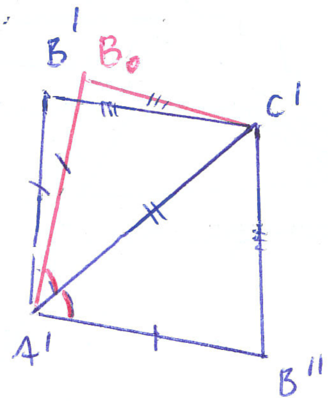
Possiamo quindi dimostrare il "III° criterio di congruenza per i triangoli"

★ **Se in ABC, $A'B'C'$ i lati corrispondenti sono congruenti, lo sono i triangoli**

$$AB = A'B' \qquad (\equiv)$$
$$AC = A'C'$$
$$BC = B'C'$$
$$\Rightarrow ABC \equiv A'B'C'$$



Dim Si trasporti $B\hat{A}C$ dalle due parti di $A'C'$, e siano B_0, B'' tali che $A'B_0 = \underset{AB}{\underset{\parallel}{A'B'}}$, $A'B'' = \underset{AB}{\underset{\parallel}{A'B'}}$.



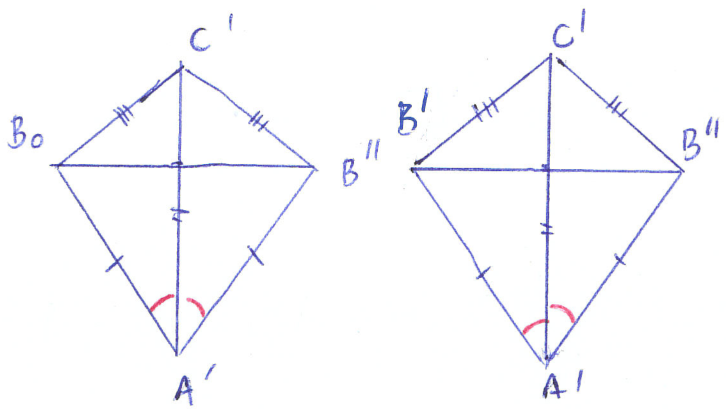
I triangoli AB_0C' e $A'B''C'$ sono allora congruenti (I° criterio), sicché $B_0C' = B''C' = B'C'$.
E sono entrambi congruenti ad ABC.
Pertanto, nei due "aquiloni" in figura è

$$B_0\hat{A}'C' = B'\hat{A}'C,$$

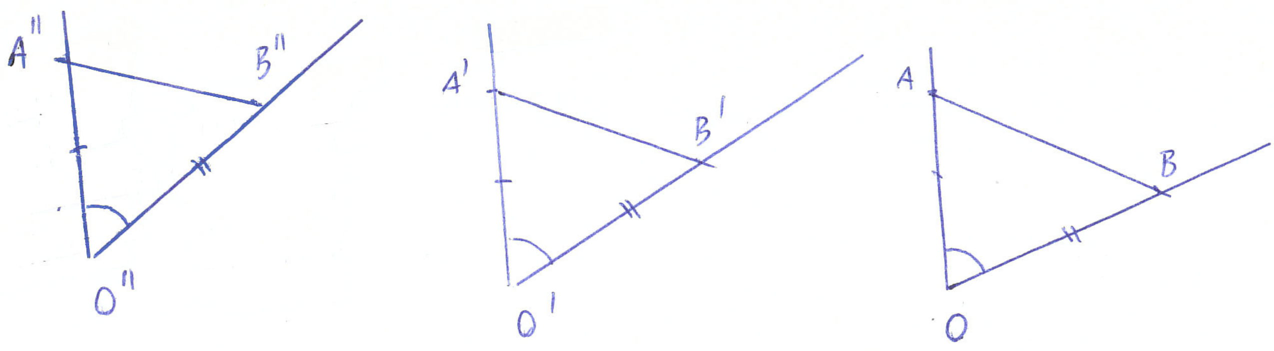
ovvero (I° criterio)

$$A'B'C' \equiv AB_0C'$$

e B_0 deve coincidere con B', da cui $ABC \equiv A'B'C'$



Dal <u>III°</u> criterio segue la <u>transitività</u> della congruenza degli angoli:



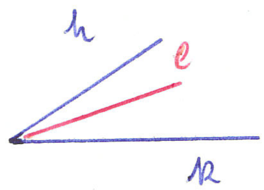
Sia $\hat{O} \equiv \hat{O}'$, $\hat{O} \equiv \hat{O}''$. Dobbiamo far vedere che $\hat{O}' \equiv \hat{O}''$. Si determinino $OA = O'A' = O''A''$,
$OB = O'B' = O''B''$

I triangoli OAB e $O'A'B'$ e OAB e $O''A''B''$ sono congruenti per il primo criterio. Da ciò segue che $A''B'' \equiv A'B' \equiv AB$ ($\equiv$ per i segmenti è transitiva)

I triangoli $O'A'B'$ e $O''A''B''$ sono allora congruenti (III° criterio), sicché $\hat{O}' = \hat{O}''$

Si ha anche la <u>simmetria</u> della relazione di congruenza.

Di conseguenza, si può fondare il <u>confronto</u> tra <u>angoli</u>



se l è interna ad $\widehat{hk}$, diciamo che $\underbrace{\widehat{hl} < \widehat{hk}}_{\text{minore}}$ $\underbrace{\widehat{kl} < \widehat{hk}}_{\text{minore}}$

e $\underbrace{\widehat{hk} > \widehat{hl}}_{\text{maggiore}}$ $\widehat{hk} > \widehat{kl}$.

Sussiste, tra angoli α, β, una e una sola delle tre relazioni:

$$\alpha \gtreqless \beta$$

In modo naturale si introduce anche il <u>confronto</u> dei <u>segmenti</u>