Lezione XVII

V2

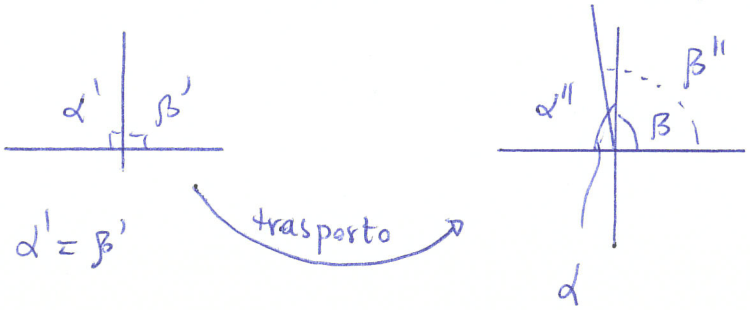
MATEMATICHE COMPLEMENTARI II

Prof. Mauro Spera, UCSC Brescia

Ulteriori conseguenze degli assiomi di congruenza

* <u>Tutti gli angoli retti</u> sono <u>congruenti</u> tra loro

(il IV postulato di Euclide viene così dimostrato)



Se α', retto, non fosse congruente ad α, retto, il suo trasporto darebbe ad es. $\alpha'' < \alpha$ (per fissare le idee)

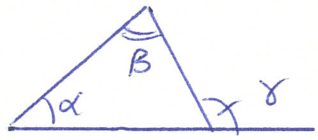
Ma l'angolo <u>retto</u> α'' non potrebbe uguagliare l'angolo adiacente $\beta'' > \beta$ (retto): assurdo.

* In un triangolo, a lato maggiore è opposto angolo maggiore

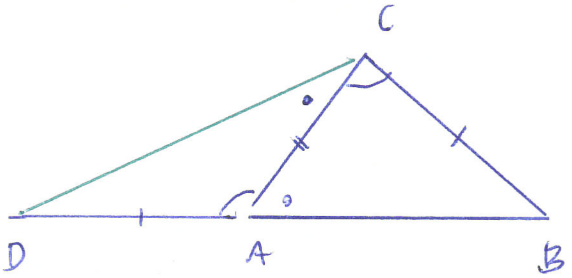
come corollario, risulta che un triangolo con <u>due</u> <u>angoli</u> uguali è <u>isoscele</u>

Si estende altresì il <u>secondo criterio</u> di <u>congruenza</u> dei <u>triangoli</u> al <u>secondo</u> caso (un lato, un angolo adiacente e l'altro opposto).

11 Teorema dell'angolo esterno

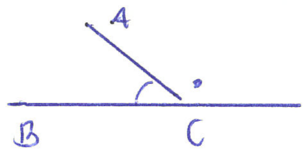


$\gamma > \alpha$
$\gamma > \beta$



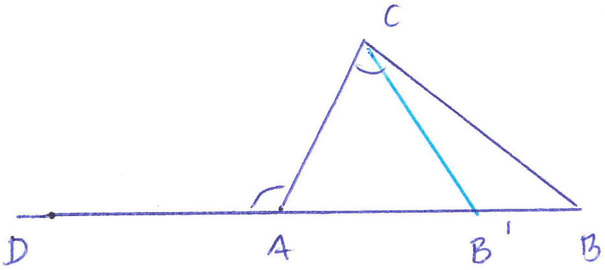
Con riferimento alla figura accanto sia $CB = AD$ e si supponga p.a. $\boxed{D\hat{A}C = A\hat{C}B}$. I triangoli DAC e ABC risultano allora congruenti (I° crit.), da cui $D\hat{C}A = B\hat{A}C$ ($\angle\circ$)

Ma $D\hat{A}C$ e $B\hat{A}C$ sono adiacenti e dunque, per il trasporto dell'angolo, D, C, B dovrebbero risultare allineati, e ciò è assurdo.



!

Supponiamo poi che $\boxed{D\hat{A}C < A\hat{C}B}$



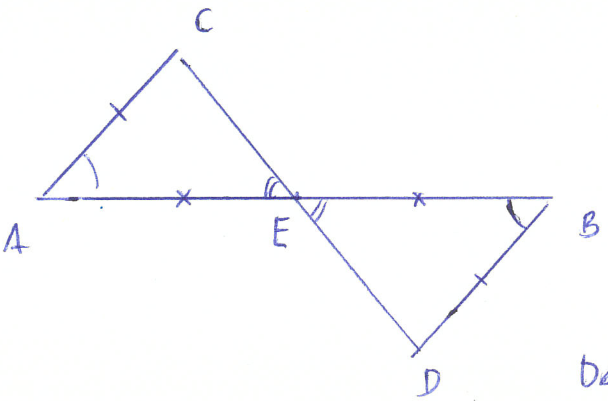
Trasportando l'angolo esterno ($A\hat{C}B' = D\hat{A}C$) si trova ancora un assurdo per la prima parte.

Pertanto si conclude che $\boxed{D\hat{A}C > A\hat{C}B}$

Passando, come in Euclide, all'angolo opposto al vertice, si dimostra pure che $\boxed{D\hat{A}C > A\hat{B}C}$

Il teorema è dimostrato.

Ogni segmento può essere dimezzato

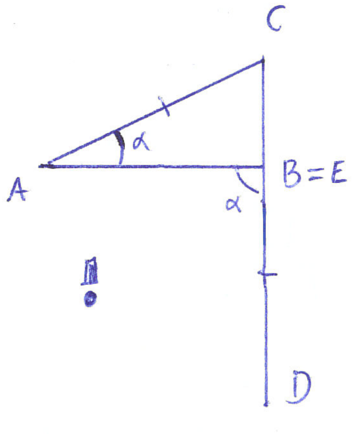


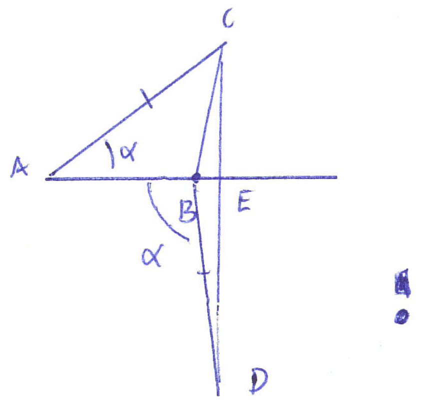
Si esegua la costruzione indicata in figura: Si prenda un angolo qualsiasi $B\hat{A}C$, lo si trasporti in $A\hat{B}D$ e si faccia $AC = BD$.

CD incontra AB in E, interno ad AB (+).

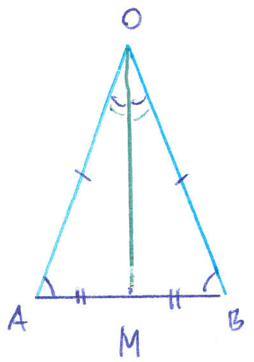
Dal secondo criterio segue subito che $ACE \equiv EBD$ e che pertanto $AE = EB$.

(+) Le altre situazioni sono vietate dal teorema dell'angolo esterno





Ogni angolo è dimezzabile



Si faccia $OA = OB$. OAB è isoscele $\Rightarrow$ $\hat{A} = \hat{B}$. Sia M il pto medio di AB.

$OAM \equiv OBM$ (I° criterio)

$\Rightarrow$ $A\hat{O}M = M\hat{O}B$ (e OM è perpendicolare ad AB)

Si hanno poi i seguenti teoremi generali di congruenza

* Figura : un insieme finito di punti : $(A, B \ldots L)$
* congruenza di figure : definita in modo naturale (congruenza di tutti i possibili segmenti e angoli coinvolti)

- Nel piano Se $(A, B \ldots L)$, $(A', B' \ldots L')$ sono figure congruenti poste in piani α, α' risp. $\forall P \in \alpha$, $\exists P' \in \alpha'$ tale che $(A, B \ldots L, P)$ sia congruente a $(A' B' \ldots L', P')$ e, se $(A, B, \ldots L)$ contiene tre pti non allineati, la costruzione è possibile in un solo modo

- Nello spazio. Vale lo stesso, con la seguente modifica: Se $(A, B \ldots L)$ contiene quattro punti non complanari, la costruzione è possibile in un unico modo.