Prof. Mauro Spera, UCSC Brescia

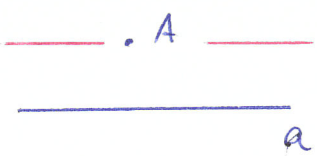
MATEMATICHE COMPLEMENTARI II

Lezione XVIII

Grundlagen der Geometrie

V2

(IV) Assioma delle parallele (V° postulato nella forma di Playfair)



Dati in un piano una retta a e un pto $A \notin a$, esiste al più una parallela alla retta data

[retta del piano non avente pti in comune con a]

L'esistenza di almeno una parallela è dimostrabile

Equivalentemente: se due rette a, b nello stesso piano (distinte), non intersecano una retta c dello stesso piano, allora sono parallele

Si ritrovano i classici teoremi euclidei, in particolare: la somma degli angoli interni di un triangolo è pari a due retti

Si introduce il concetto di circonferenza e si ricavano i vari teoremi euclidei.

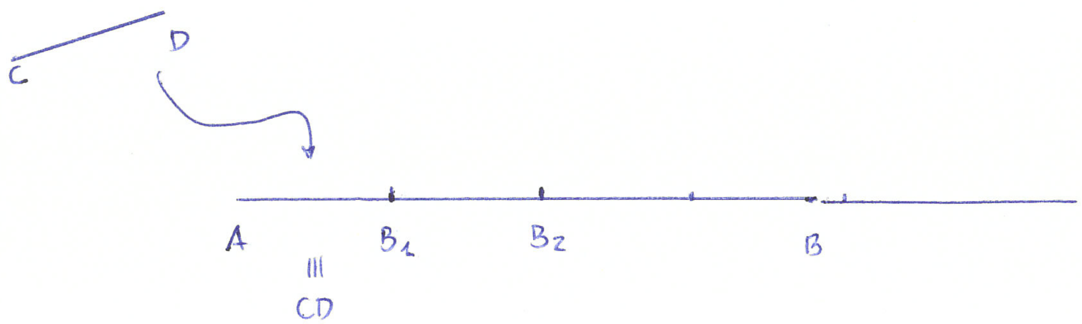
Come vedremo anche più avanti, una volta consolidate le fondamenta, Hilbert fa uso massiccio delle costruzioni euclidee

Assiomi di continuità

(V1) Assioma archimedeo

"prepara la continuità"

Se AB, CD sono segmenti qualsiasi, esiste un numero n tale che il trasporto di CD, sulla semiretta AB, ripetuto n volte, porta al di là di B



(V2) Assioma di completezza lineare

(Chiave di volta del sistema

Il sistema dei punti di una retta non è suscettibile di un ampliamento per il quale rimangono inalterate le relazioni tra i sistemi precedenti e le proprietà fondamentali di ordinamento e congruenza provenienti da I – III e V1

Teorema di completezza

gli elementi della geometria costituiscono un sistema non più suscettibile di ampliamenti con nuovi elementi conservando gli assiomi.

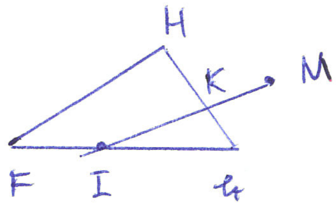
Dim Sia N un pto nuovo. vogliamo dimostrare che la sua presenza conduce ad una contraddizione.

Siano A, B, C, D quattro pti vecchi non complanari.

Siano A, B, N non allineati. I piani (distinti) ABN e ACD hanno, oltre ad A, un altro punto E in comune. $E \notin AB$, altrimenti $B \in ACD$ (e i pti A, B, C, D non sono complanari). Se E è nuovo, in ACD c'è un nuovo pto. Se E è vecchio, $N \in ABE$ nuovo

Dunque: esiste un pto nuovo in un vecchio piano

Sia allora M nuovo in un vecchio piano FGH



Sia I vecchio su FG. Tracciata MI, si trova K (Pasch)

Se ora $\boxed{\text{K è nuovo}}$, sarebbe un nuovo punto di una retta vecchia, HG, assurdo.

Se $\boxed{\text{K è vecchio}}$, M sarebbe un pto nuovo della retta vecchia IK, parimenti assurdo.