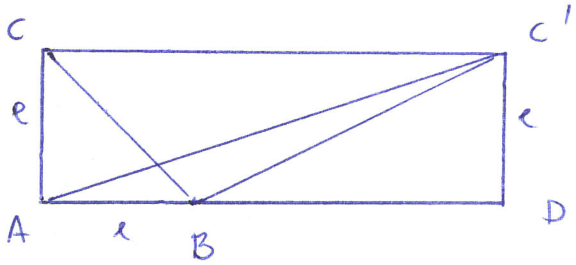
Lezione XX

Prof. Mauro Spera
UCSC Brescia

★ Teoria hilbertiana dell'estensione (nel piano) ("area").

Si è già parlato di equiampliabilità ed equiscomponibilità di poligoni semplici. Vogliamo giungere al teorema di Bolyai - Gerwien che stabilisce l'equivalenza dei suddetti concetti, in ambito archimedeo. Ci è necessaria una definizione di area come "numero" (elemento del campo dei segmenti). Prima di introdurla, facciamo vedere che, se cade l'assioma archimedeo, il teorema di B-G diviene falso.



Sia e tale che per nessun n si abbia

$$n \cdot e > a \qquad (★)$$

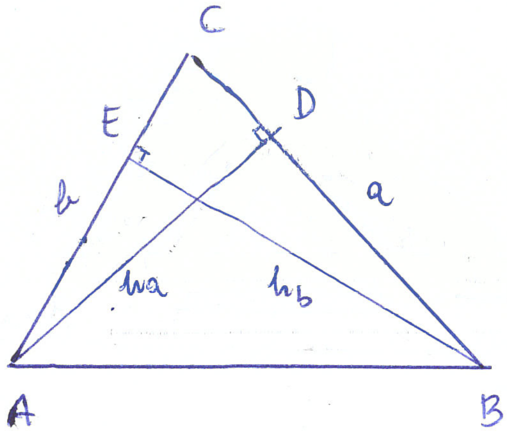
con riferimento alla figura, $BC < 2e$ e ogni segmento in ABC è minore del lato maggiore (non si fa uso della continuità). Se fosse possibile decomporre i triangoli ABC e ABC' in k triangoli congruenti, la somma di tutti i perimetri dei triangoli parziali in ABC risulterebbe $< k \cdot 3 \cdot 2e = 6ke$ e lo stesso varrebbe per la corrispondente suddivisione in ABC'. Ma in quest'ultima somma compare AC', sicchè $AC' < 6k \cdot e \Rightarrow a < 6k \cdot e$, che nega (★).

Problema: come si dimostra l'esistenza di poligoni non equiampliabili?

Ci occorre Euclide I.39 : triangoli equiampliabili su basi uguali hanno altezze uguali (☆)

fa uso della proprietà generale "il tutto è maggiore della parte"

☆ Area di triangoli e di poligoni



orientiamo i vertici del triangolo ABC ↺

Dalla similitudine di ACD e BCE si ha

$$\frac{a}{h_b} = \frac{b}{h_a} \quad \text{cioè} \quad a \cdot h_a = b \cdot h_b$$

altezze

$$(= c \cdot h_c)$$

Il segmento $\frac{1}{2}\, a \cdot h_a \; \left(= \frac{1}{2}\, b \cdot h_b = \frac{1}{2}\, c \cdot h_c\right)$

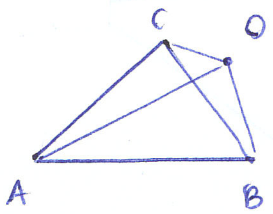
[indipendente dalla scelta del lato del triangolo],

denotato con $[ABC]$ è, per definizione

l'area orientata di ABC

$$[ABC] = [BCA] = [CAB]$$
$$[BAC] = -[ABC] \text{ ecc.}$$

In generale, se O non è sul triangolo, si ha (aree orientate)



$$[ABC] = [OAB] + [OBC] + [OCA].$$

Da questo discende facilmente che, se ABC è scomposto in triangoli, la sua area (positiva) eguaglia la somma delle aree (positive) dei vari triangoli.

In modo ovvio si definisce quindi l'area di un poligono (che risulta indipendente dalla sua decomposizione in triangoli).

Pertanto
- poligoni <u>equiscomponibili</u> hanno <u>aree uguali</u>

e
- poligoni <u>equiampliabili</u> hanno <u>aree uguali</u>

e da ciò si ottiene (★) (Euclide I.39)

Ora

$$\boxed{\text{due poligoni sono equiampliabili} \iff \text{hanno la stessa area}}$$

("$\Rightarrow$" è stato appena visto)

Siano allora P e Q poligoni di uguale area

$$\Downarrow$$

$$\text{area}(\Delta) = \text{area}(E)$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta \cong E$$ (congruenti: hanno lo stesso cateto)

$\Rightarrow$ P e Q sono <u>equiampliabili</u>

Da ciò segue in particolare l'"<u>assioma</u> di <u>de Zolt</u>"

"Scomponendo un triangolo in triangoli e rimuovendone uno di essi, con i triangoli rimanenti non si può ricostruire il triangolo."

Con l'assioma di Archimede (A)

P e Q sono equiampliabili
$\iff$ P e Q sono equiscomponibili

ovvero

P e Q sono equiscomponibili
$\iff$ P e Q hanno la stessa area

** Teorema di Bolyai - Gerwien

⚠ Falso per i solidi

" $\Rightarrow$ " già visto.

" $\Leftarrow$ " P e Q sono equiampliabili con Δ ed E, congruenti (triangoli rettangoli con un cateto $= 1$) come si è già visto

Ma, con (A) P e Δ, Q ed E sono equiscomponibili (*)

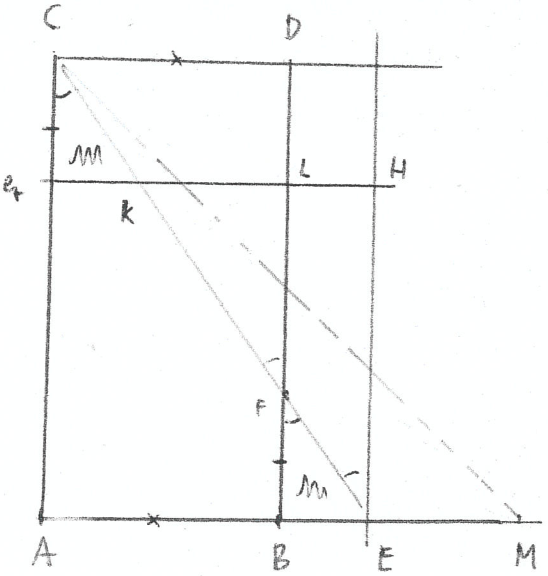
$\Rightarrow$ P e Q sono pure equiscomponibili

(*) Diamo alcuni dettagli. Intanto, un triangolo è equiscomponibile con un parallelogramma, e quest'ultimo con un rettangolo.

Dato allora un rettangolo $ABCD$, e fissato b, esso è equiscomponibile con un rettangolo di lato b.
** In virtù di (A) si può assumere $AB < b < 2AB$

La costruzione seguente permette di concludere.

$\boxed{\text{Fissato } AE \text{ t.c. } AB < AE < 2AB \quad ABCD \text{ è equiscomponibile con } AEGH}$



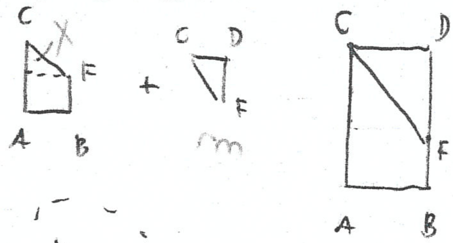
G: $CG = FB$

$\Updownarrow$ $AB < AE < AM = 2AB \Rightarrow$ F cade sotto L

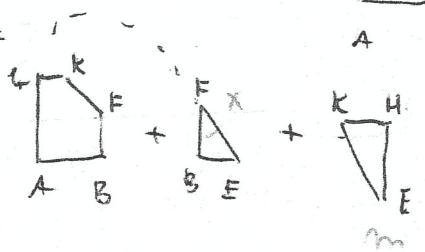
$CDF \equiv KHE$

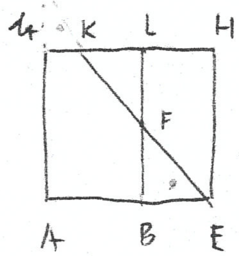
$\boxed{ABCD \ \& \ AEGH \text{ equiscomposti}}$

ABCD =



AEGH =





Costruzioni geometriche Hilbertiane

Gli assiomi I – IV garantiscono la soluzione dei problemi seguenti

1. congiungere due pti con una retta e trovare il pto di intersezione di due rette (qualora non siano parallele)

2. Trasportare un dato segmento su una data retta da una data parte di un pto.

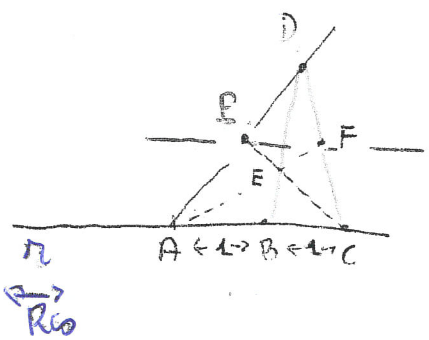
3. Trasportare un dato angolo su una data retta in un dato pto da una data parte; equiv: costruire una retta che ne intersechi un'altra in un pto sotto un dato angolo

Sono risolubili allora quei problemi riconducibili a 1, 2, 3.

4. tracciare per un pto la parallela ad una retta data
5. tracciare una perpendicolare ad una retta data.

Teorema I problemi di costruzione risolubili tramite gli assiomi I – IV, possono essere risolti con riga e compasso ad apertura fissa

Dim. Risolviamo 4.



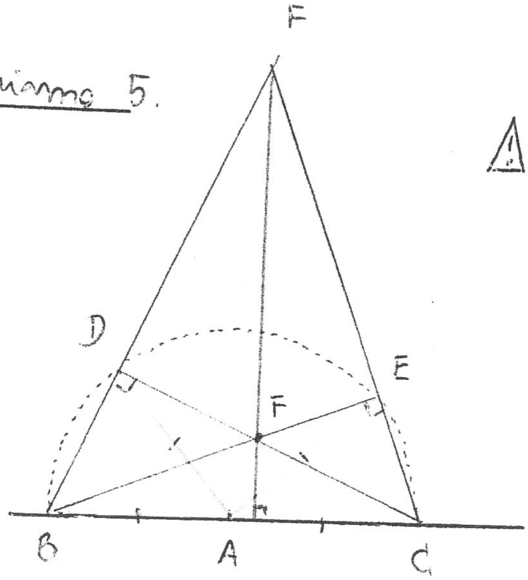
Tracciamo PA, riportiamo l'unità in B e C

Sia D su AP (con BD non $\parallel$ PC)

Congiungendo D con B troviamo E, cong. A ed E troviamo F. PF è la parallela cercata.

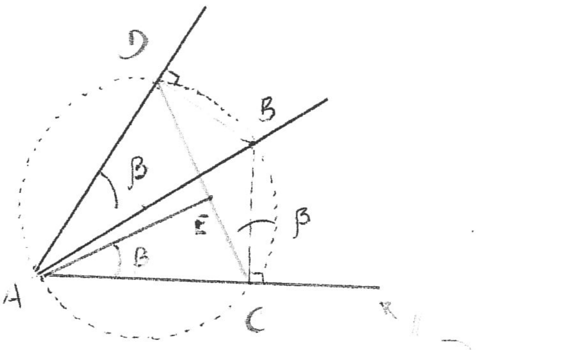
Infatti A, B, C, R_∞ formano un gruppo armonico, e PF ne è uno dei lati del quadrilatero completo

Risolviamo 5.



⚠ Si usa il fatto che le
di un triangolo si in
uno stesso punto

Risolviamo 3



Dico che $E\hat{A}C = \beta$:

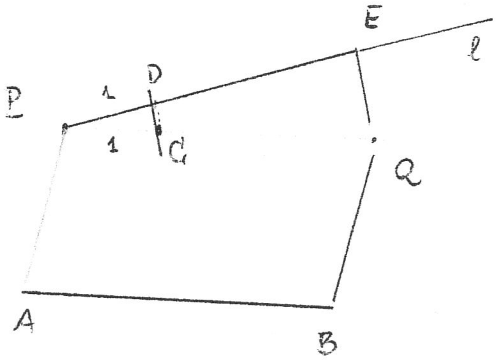
i pti A D B C sono su una stessa circonferenza, pertanto

$B\hat{C}D = D\hat{A}B = \beta$ perché insistono entrambi sull'arco

Ma allora $E\hat{C}A = \frac{\pi}{2} - \beta$ e $E\hat{A}C = \beta$

Risolviamo 2 (Kürschák)

AB da trasportare su



Sia

QB // PA , QE // CD

È PE ≡ PQ ≡ AB