Ulteriori commenti sul calcolo dei segmenti

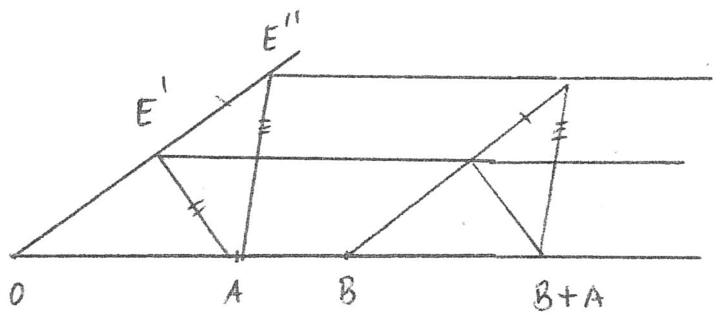
Con gli assiomi di Hilbert si possono provare i teoremi di Desargues e di Pascal (di più, il secondo implica il primo).

Se si usano gli assiomi di incidenza e l'assioma delle parallele e si pongono come assiomi Desargues e Pascal si può pure costruire il calcolo con i segmenti (oppure si usa l'intero sistema di Hilbert e si usano comunque D e P)

In modo specifico:

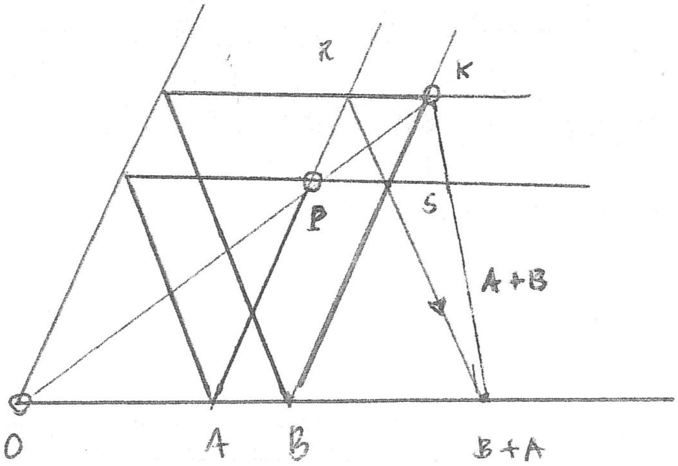
★ Con D si provano: la commutatività dell'addizione e l'associatività dell'addizione e della moltiplicazione nonché la proprietà distributiva

★ Con P si prova la commutatività della moltiplicazione [questa, lo ricordiamo, è assicurata se imponiamo l'assioma di Archimede]



– , = .. parallelismo

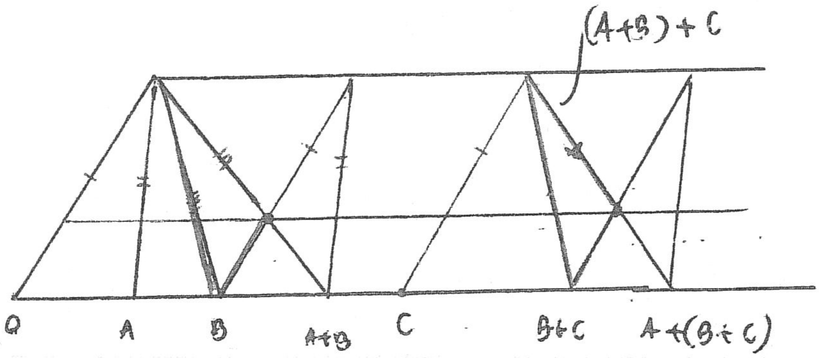
proviamo la commutatività con Desargues:



partire da A o B
porta allo stesso
risultato
(O P K sono
allineati per D.)

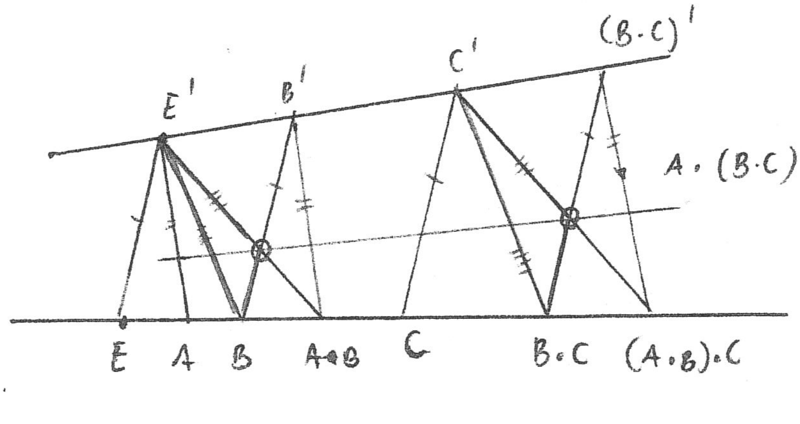
A+B = B+A

+ Associatività dell'addizione

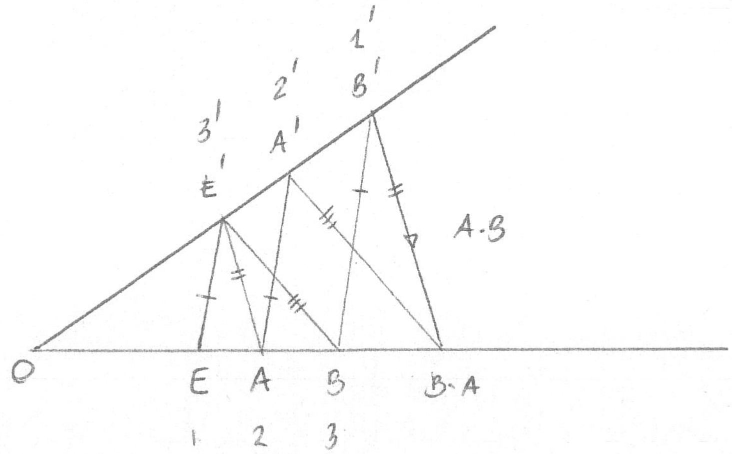


(A+B)+C = A+(B+C)

+ Associatività della moltiplicazione



* Commutatività della moltiplicazione (con Pascal)



* Proprietà distributiva (con Desargues)

$$(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$$

4 **Teorema**. Un corpo archimedeo è un campo (ovvero, "$\circ$" è commutativa)

Dim. ovviamente $a \cdot n = n \cdot a$ $(= \underbrace{a + a + \dots + a}_{n})$

Senza perdere in generalità supponiamo

$$a > 0 \quad b > 0 \quad ab - ba > 0$$

sia $c > 0$ tale che

$$\boxed{(a+b+1)c = ab - ba} \quad (*)$$

sia d tale che $d > 0$ $d < 1$, $d < c$

Siano m ed n tali che

$$md < a < (m+1)d$$
$$nd < b < (n+1)d$$

m e n esistono p il campo è archim

allora $ab < (m+1)(n+1)d^2 = (mn + m + n +$

$ba > mnd^2$

$\Rightarrow$ $ab - ba < (m + n + 1)d^2$

da $md < a$ $nd < b$ $d < 1$ si ha

$$(m+n+1)d < (a+b+1)$$

$$\Rightarrow \boxed{ab - ba < (a+b+1)d < (a+b+1)c}$$

in contrasto con $(*)$.

Dunque vale la proprietà commutativa di "$\circ$"