Prof. Mauro Spera, UCSC Brescia

In questa lezione e nelle successive presentiamo alcuni complementi di geometria proiettiva. Non procederemo in modo strettamente assiomatico, e faremo libero uso di nozioni apprese in altri corsi (considerazioni metriche, coordinate omogenee, metodi matriciali). Lo scopo principale (ma non l'unico) è arrivare a descrivere il modello di Beltrami-Klein del piano iperbolico, nonché la metrica proiettiva generale di Klein. Importanti digressioni riguardano il tracciamento di coniche (sulla base dei teoremi di Steiner-Chasles e di Pascal) e il disegno prospettico ("omologia di Piero della Francesca")

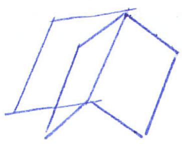
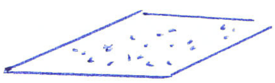
◈ ◈ ◈

★ Assiomi della geometria proiettiva (secondo Enriques)

Elementi fondamentali: punti, rette, piani

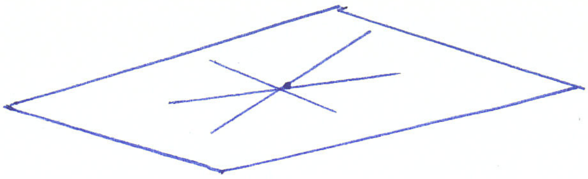
(nello spazio, completato dal piano improprio, luogo delle direzioni delle sue rette)

Forme geometriche fondamentali: (di prima, seconda e terza specie)

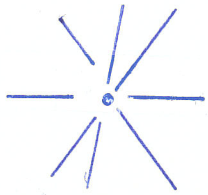
specie	forme geometriche		
I	1. retta punteggiata		(retta come insieme dei suoi pti)
I	2. fascio di piani		(piani per una retta)
II	3. piano punteggiato		(piano come luogo dei suoi pti)
II	4. piano rigato		(piano come insieme delle sue rette)

In un sistema piano (pti e rette di un dato piano)

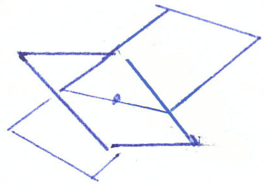
I 5. fascio di rette (rette del piano per un singolo pto)



II 6. Stella di rette (rette - nello spazio - per un singolo punto)



II 7. Stella di piani (piani per un singolo punto)



III 8. spazio punteggiato (lo spazio come insieme dei suoi punti)

III 9. spazio di piani (lo spazio come totalità dei suoi piani)

[10. spazio rigato spazio come totalità delle sue rette]

uso "Quadrica di Klein" Q

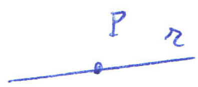
rette ($\mathbb{P}^1$) nello spazio ($\mathbb{P}^3$)

$\sim$ Q in $\mathbb{P}^5$ (complesso)

Si pensano aggiunti gli elementi impropri, dopo di ché non si opera nessuna distinzione tra elementi propri e impropri

Due elementi fondamentali si appartengono quando uno di essi è contenuto nell'altro

Es: un pto e una retta si appartengono



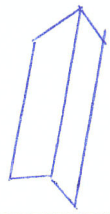
ecc. Si utilizzano poi le locuzioni usuali

* Assiomi di incidenza (grafici) → si collegano al senso della vista

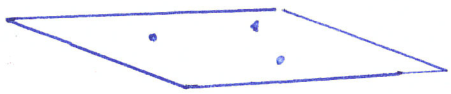
["gli elementi propri e impropri possono e debbono essere considerati indifferentemente"]

a) Due punti determinano una (e una sola) retta cui appartengono

a') Due piani determinano una (e una sola) retta cui appartengono

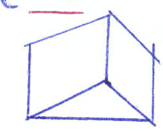


b) Tre punti non appartenenti ad una retta (+) individuano uno e un solo piano, cui appartengono



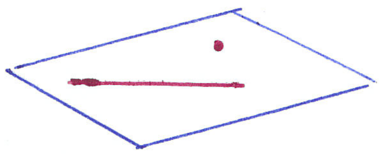
(+) non allineati

b') Tre piani non appartenenti ad una retta (+) determinano uno e un sol punto che ad essi appartiene (cui appartengono)

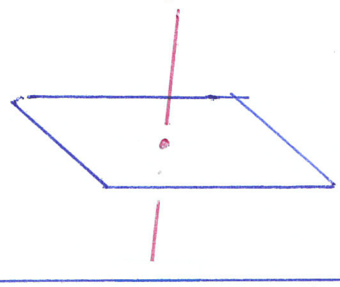


(+) non formanti fascio

c) Un punto e una retta che non si appartengono determinano uno e un solo piano, cui appartengono



c') Un piano e una retta, che non si appartengono, determinano uno e un sol punto che ad essi appartiene (cui appartengono)



gli assiomi sono mutuamente duali a) e a'), b) e b'), c e c')

** Dualità (Gergonne) nello spazio

scambi

punto ⟷ piano

retta ⟷ retta

nel piano

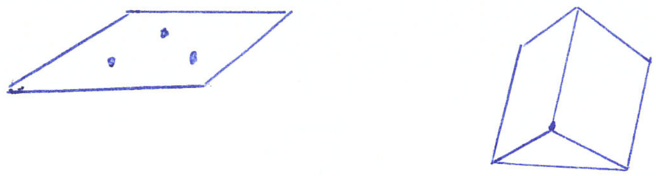
punto ⟷ retta

segue dalla dualità spaziale

In modo sintetico, possiamo asserire che

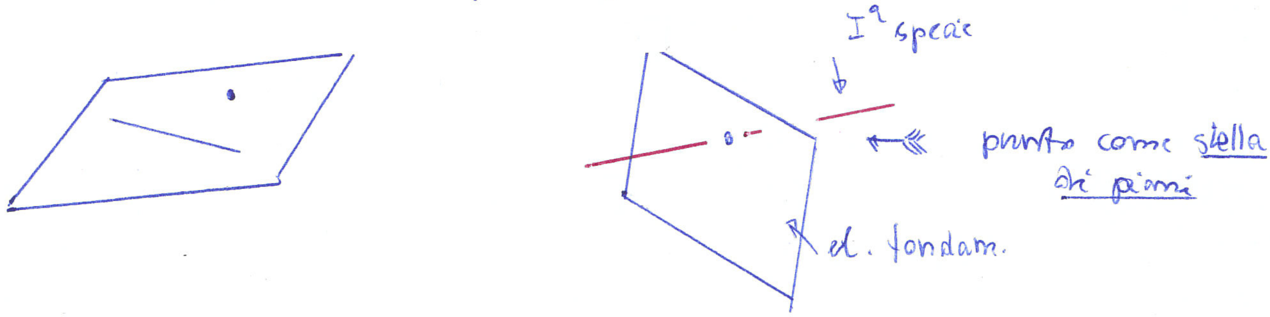
(I) In una forma di III^a specie, due elementi fondamentali determinano una forma di I^a specie, cui appartengono

(II) In una forma di III^a specie, tre elementi fondamentali non appartenenti ad una forma di prima specie determinano una forma di II^a specie, cui appartengono.



il punto è visto come stella di piani per quel punto centro della stella

(III) In una forma di III^a specie, un elemento fondamentale e una forma di I^a specie che non si appartengono determinano una forma di II^a specie, cui appartengono.



I, II, III : primo gruppo di postulati della geometria proiettiva (di incidenza)

☆ Operazioni della geometria proiettiva

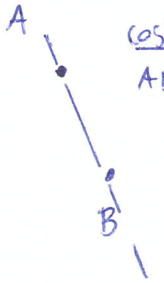
proiezioni e **sezioni**

proiettare una figura ...

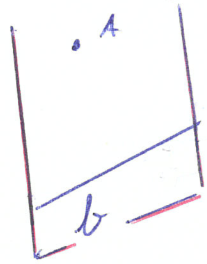
$\mathcal{F} = (B, C \ldots\ b, c \ldots)$
punti rette

proiezione da...

• ... da un pto A (centro di proiezione - esterno alla figura)



costruire AB

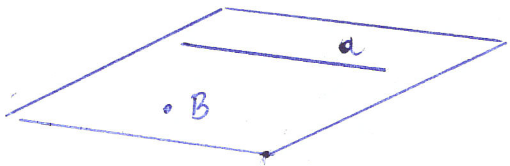


costruire $\pi(A, b)$

In generale, costruire le rette AB, con $B \in \mathcal{F}$

• ... da una retta a (asse di proiezione)

determinare i vari piani $\pi(B, a)$ $B \in \mathcal{F}$; nuova figura: $A(B, C \ldots b, c \ldots)$

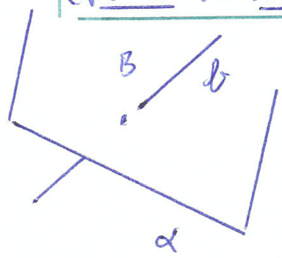


segare una figura ...

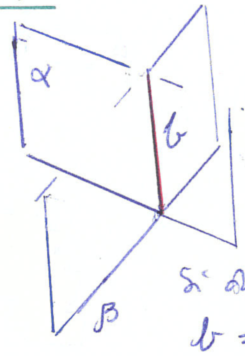
$\mathcal{F} = (b, c, \ldots \beta, \gamma \ldots)$
rette piani

sezione con

• ... con un piano α, non appartenente ad un elemento della figura (piano di sezione)

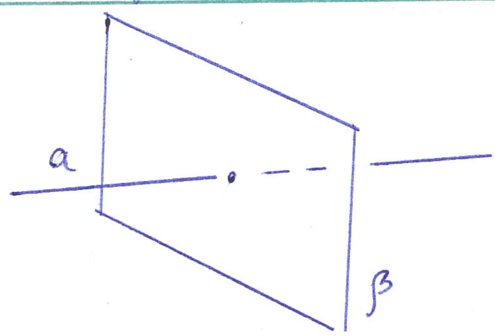


si determina $\alpha \cap \beta$



si determina $b = \alpha \cap \beta$

• ... con una retta a (non appartenente ad un elemento della figura)



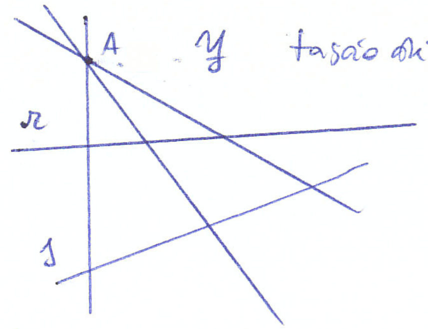
☆ proiettare una figura da A (esterno ad essa) su un piano α: si proietta da A e la figura ottenuta si sega con α

Forme della stessa specie si dicono prospettive se sono l'una proiezione dell'altra o, se omonime, ambedue proiezioni / sezioni di una medesima forma.

Due forme della stessa specie si dicono riferite tramite proiezioni e sezioni se si ottengono l'una dall'altra attraverso un numero finito di prospettività.

Diamo alcuni esempi

1• Nel piano:



$\mathcal{Y}$ fascio di rette di centro A

r, s punteggiate

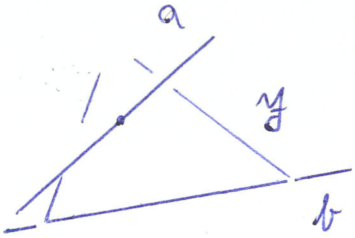
$\mathcal{Y}$ e r, $\mathcal{Y}$ e s

così come r e s

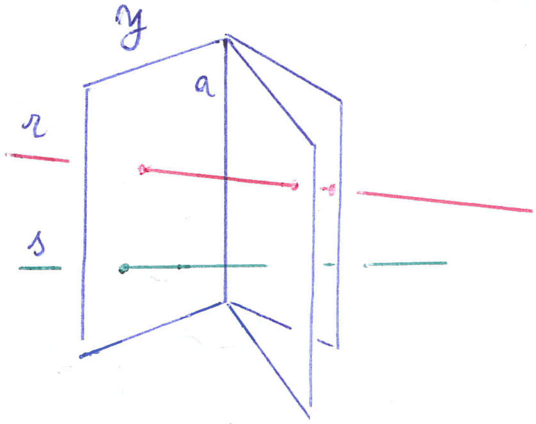
sono forme (di prima specie) prospettive

$\mathcal{Y}$ si ottiene proiettando r (o s) da A, r (s) si ottiene segando $\mathcal{Y}$ con r stessa... ; r ed s sono sezioni di $\mathcal{Y}$

2•



Date due rette sghembe a, b, si consideri ad esempio il fascio di piani di asse b: esso è prospettivo alla punteggiata a

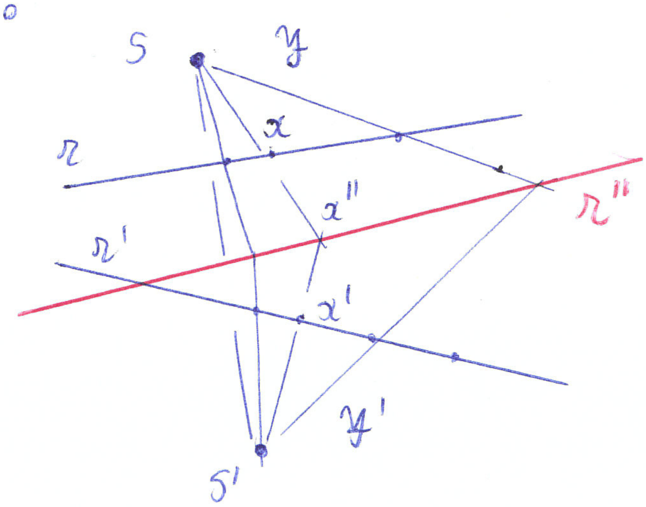


r, s, a mutuamente sghembe.

$\mathcal{Y}$ ed r, $\mathcal{Y}$ e s, e così r ed s sono forme di prima specie prospettive

3• Nel piano

* importante per il seguito



r e r' riferite proiettivamente (legate da un'omografia, o collineazione, o proiettività, v. oltre)

infatti risultano prospettive ad una medesima retta r''

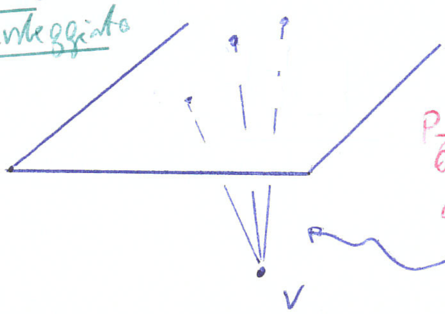
$x \leftrightarrow x'' \leftrightarrow x'$

Deduciamo la dualità piana dalla dualità nello spazio

pto ↔ retta

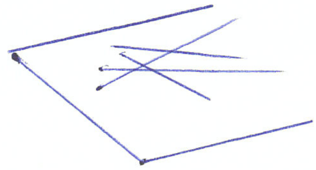
punto ↔ piano
retta ↔ retta

piano punteggiato



proiezione da V: stella di rette

→ dualità spaziale
rette per un pto
→ rette su un piano



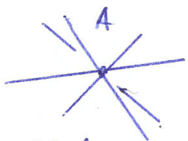
piano rigato

piano punteggiato	$\xrightarrow{\text{proiezione}}$	$\boxed{\text{stella di rette}}$	$\xrightarrow{\text{dualità spaziale}}$	piano rigato

viceversa

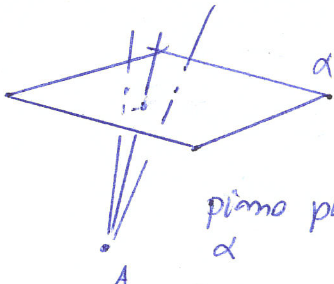
piano rigato
(rette in α)

dualità →



stella di rette 𝒮
(centro A)

sezione →



piano punteggiato α
(sezione di 𝒮)

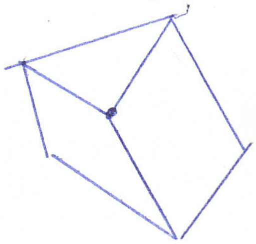
piano rigato	$\xrightarrow{\text{dualità}}$	$\boxed{\text{stella di rette}}$	$\xrightarrow{\text{sezione}}$	piano punteggiato

★ La dualità piana pti ↔ rette è stata ottenuta invocando una forma di 2ª specie (spaziale), la stella di rette

Ancora:

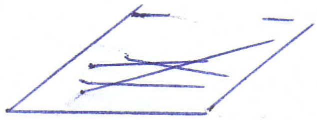
piano punteggiato

$\xrightarrow{\text{dualità}}$



stella di piani

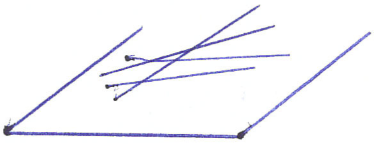
$\xrightarrow{\text{sezione}}$



piano rigato

piano punteggiato $\xrightarrow{\text{dualità}}$ stella di piani $\xrightarrow{\text{sezione}}$ piano rigato

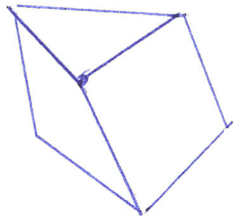
viceversa



piano rigato

$\xrightarrow{\text{proiezione}}$

stella di piani



$\xrightarrow{\text{dualità}}$

piano punteggiato

piano rigato $\xrightarrow{\text{proiezione}}$ stella di piani $\xrightarrow{\text{dualità}}$ piano punteggiato