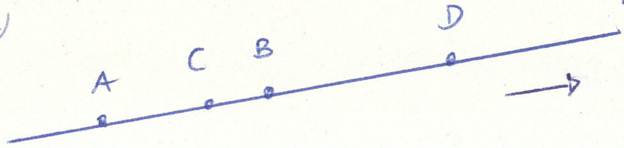
Lezione XXIII

Prof. Mauro Spera
UCSC, Brescia

Birapporto (def. metrica)

in una forma di prima specie (ad esempio una punteggiata)



$$(ABCD) = \frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD} = \frac{AC}{AD} \cdot \frac{BD}{BC}$$

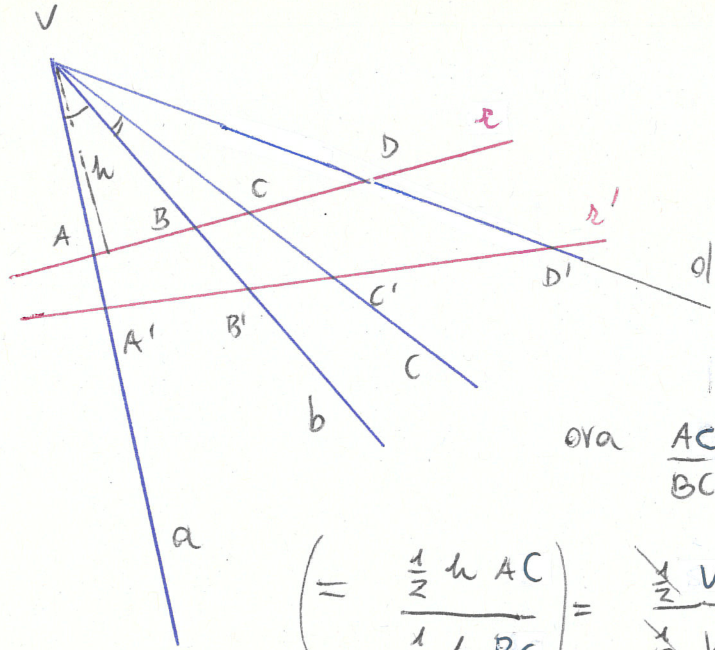
per il momento A, B, C, D propri, distinti

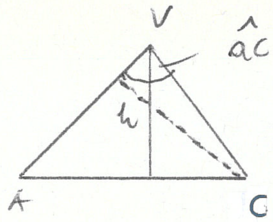
le lunghezze sono orientate

$$= \frac{AC}{BC} \cdot \frac{BD}{AD} = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$$

proprietà cruciale

1 invarianza per proiezioni e sezioni





ora $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{A(VAC)}{A(VBC)}$

$$\left(= \frac{\frac{1}{2} h\, AC}{\frac{1}{2} h\, BC}\right) = \frac{\cancel{\frac{1}{2}}\, VA\; VC \sin(\hat{ac})}{\cancel{\frac{1}{2}}\, VB\; VC \sin(\hat{bc})}$$

$A(AVC) = \frac{1}{2} AC \cdot h = \frac{1}{2}\, VA \cdot VC \sin(\hat{ac})$ e formule analoghe

$$\Rightarrow (ABCD) = \frac{\sin(\hat{ac})}{\sin(\hat{bc})} : \frac{\sin(\hat{ad})}{\sin(\hat{bd})} = (A'B'C'D')$$

$$\equiv (a, b, c, d) \quad \leftarrow \text{per fascio di rette}$$

Se $D = \infty$ $\quad \dfrac{AD}{BD} = 1$

$\Rightarrow \dfrac{AC}{BC}$ (= rapporto semplice (ABC))

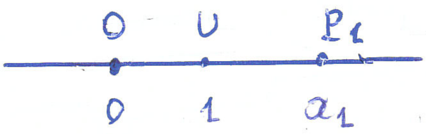
Birapporto (cross-ratio)

in coordinate affini

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{x_1-x_3}{x_2-x_3} : \frac{x_1-x_4}{x_2-x_4}$$

$x_i \in \mathbb{R}$

$$= \frac{x_1-x_3}{x_2-x_3} \cdot \frac{x_2-x_4}{x_1-x_4}$$



Se $x_4 = \infty$ $\quad (x_1, x_2, x_3, \infty) = \dfrac{x_1-x_3}{x_2-x_3}$ $\quad$ rapp. semplice

Scambi contemporanei

$$(A\,B\,C\,D) = (B\,A\,D\,C) = (C\,D\,A\,B) = (D\,C\,B\,A)$$

$$(A\,B\,C\,D) = \frac{AC}{AD} \cdot \frac{BD}{BC}$$

Dei **24** possibili birapporti ($= 4!$) in generale solo **6** sono distinti (si porta per es. A al 1° posto)

- scambiando i due primi o i due ultimi elementi si ottiene il reciproco:

$$(A\,B\,C\,D) = \frac{AC}{AD} \cdot \frac{BD}{BC}$$

$$(A\,B\,D\,C) = \frac{AD}{AC} \cdot \frac{BC}{BD}$$

- scambiando i medi o gli estremi, si ottiene un birapporto che sommato all'originario dà 1

Il calcolo è immediato. Possiamo anche procedere così:

sia: $(x_1, x_2, 0, \infty) = \dfrac{x_1}{x_2}$ $\quad \left(= \dfrac{x_1-0}{x_2-0} \cdot \dfrac{x_2-\infty}{x_1-\infty} \right)$

Scambiamo i medi

$$(x_1 \; 0 \; x_2 \; \infty) = \frac{x_1 - x_2}{0 - x_2} \cdot \frac{0-\infty}{x_1-\infty}$$

al limite $= 1$

$$= -\frac{x_1}{x_2} + 1$$

da cui l'asserto. Il risultato è generale in virtù dell'invarianza del birapporto

⚠ qualora si stabilisca il teorema fondamentale della geom. proiettiva v. oltre

In definitiva

se

$$(A\,B\,C\,D) = k \quad , \text{è}$$

$$(A\,B\,D\,C) = \frac{1}{k}$$

$$(A\,C\,B\,D) = 1 - k$$

$$(A\,C\,D\,B) = \frac{1}{1-k}$$

$$(A\,D\,B\,C) = \frac{k-1}{k}$$

$$(A\,D\,C\,B) = \frac{k}{k-1}$$

*** gruppo armonico

imponiamo $(A\,B\;C\,D) = (A\,B\;D\,C)$

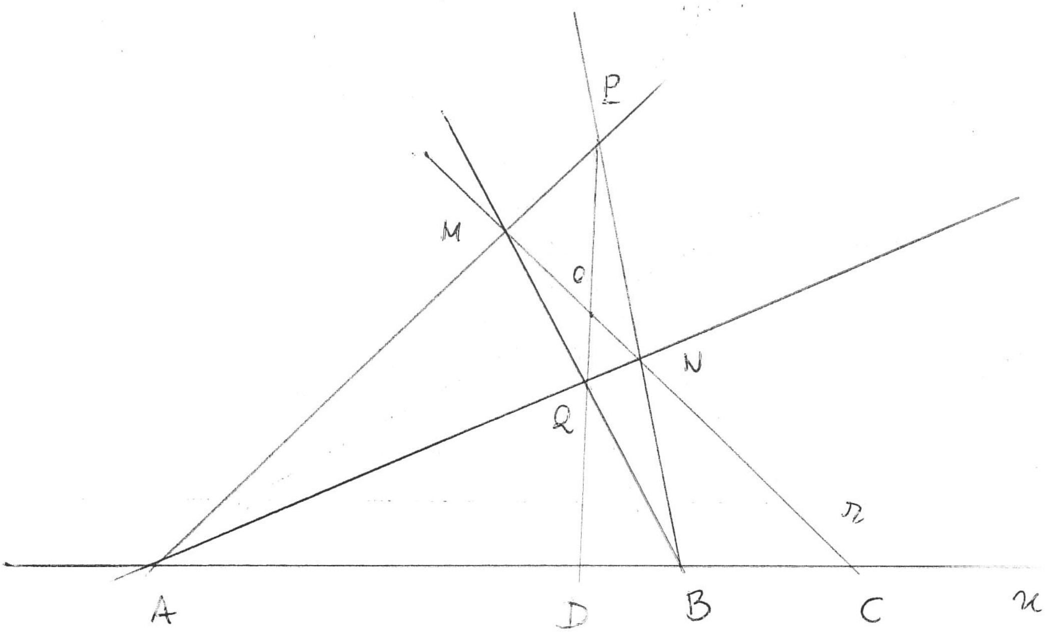
si ha $k = \frac{1}{k}$, cioè $k^2 = 1 \Rightarrow k = \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases}$

2 pti coincidenti

$k = -1 \longrightarrow$ gruppo armonico

→ Spesso useremo la notazione $(ABCD)$ sia per il gruppo di punti (spesso armonico) sia per il loro birapporto

*** Costruzione geometrica di un gruppo armonico.

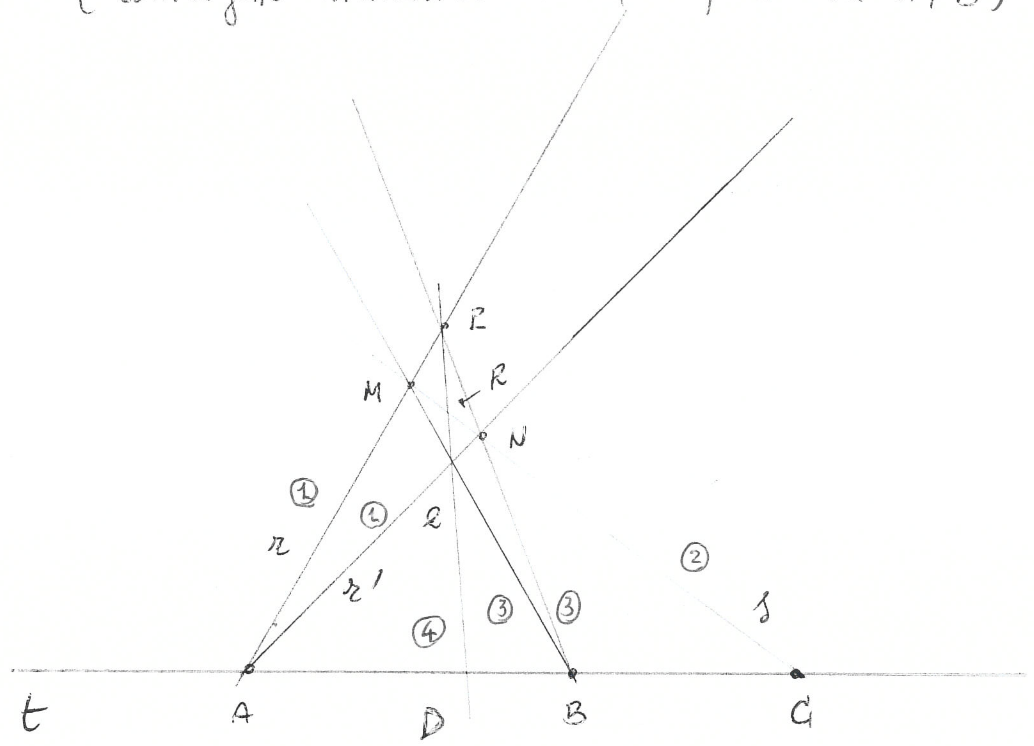


Immaginiamo il problema risolto (analisi, nel senso di Pappo): sia A B C D armonico. Allora, data una retta arbitraria r per C (per ex) e proiettando da $P \notin x$, $P \notin r$, su r, si ottiene un gruppo armonico: M N C O. Ma allora è armonico pure NMCO. Si traccino NA e MA e sia $Q = NA \cap MB$. Proiettiamo NMCO da Q su x: si ottiene

$$(A\,B\,C\,D') \underset{\text{pr di } Q}{=} (A\,B\,C\,D) \Rightarrow D' = D.$$

in definitiva: $\longrightarrow$

*** Costruzione del quarto armonico D, dopo A, B, C
(coniugato armonico di C rispetto ad A, B)



1. Si traccino due rette arbitrarie per A, r, r'
2. Si tracci una retta arbitraria per C (s), essa interseca le prime due in M e N
3. Si traccino le rette BM, BN; siano

   $P = r \cap BN$, $Q = r' \cap BM$

4. La retta PQ interseca la retta data in D, che è il punto cercato

A e B : punti di incontro dei lati opposti di un quadrangolo completo

R : punto di incontro delle diagonali di questo

C e D : intersezioni delle diagonali con AB

Le simmetrie $A \leftrightarrow B$ e $C \leftrightarrow D$ rendono manifesta l'armonicità di A, B, C, D

* Considerazioni metriche

$r = \dfrac{AM}{BM}$ rapporto semplice di A, B, M

$A = a \quad B = b$ ascisse

$M: x$

$$r = \frac{a - x}{b - x}$$

$$r(b - x) = a - x$$

$$x(1 - r) = a - rb$$

$$x = \frac{a - rb}{1 - r}$$ se r è dato

Se ora $A\,B\,C\,D$ è un gruppo armonico

e $(ABC) = r$, da $(A\,B\,C\,D) = \overset{r}{\dfrac{AC}{BC}} \cdot \dfrac{BD}{AD} = -1$

si ha $\dfrac{BD}{AD} = -\dfrac{1}{r} \Rightarrow \dfrac{AD}{BD} = (A\,B\,D) = -r$

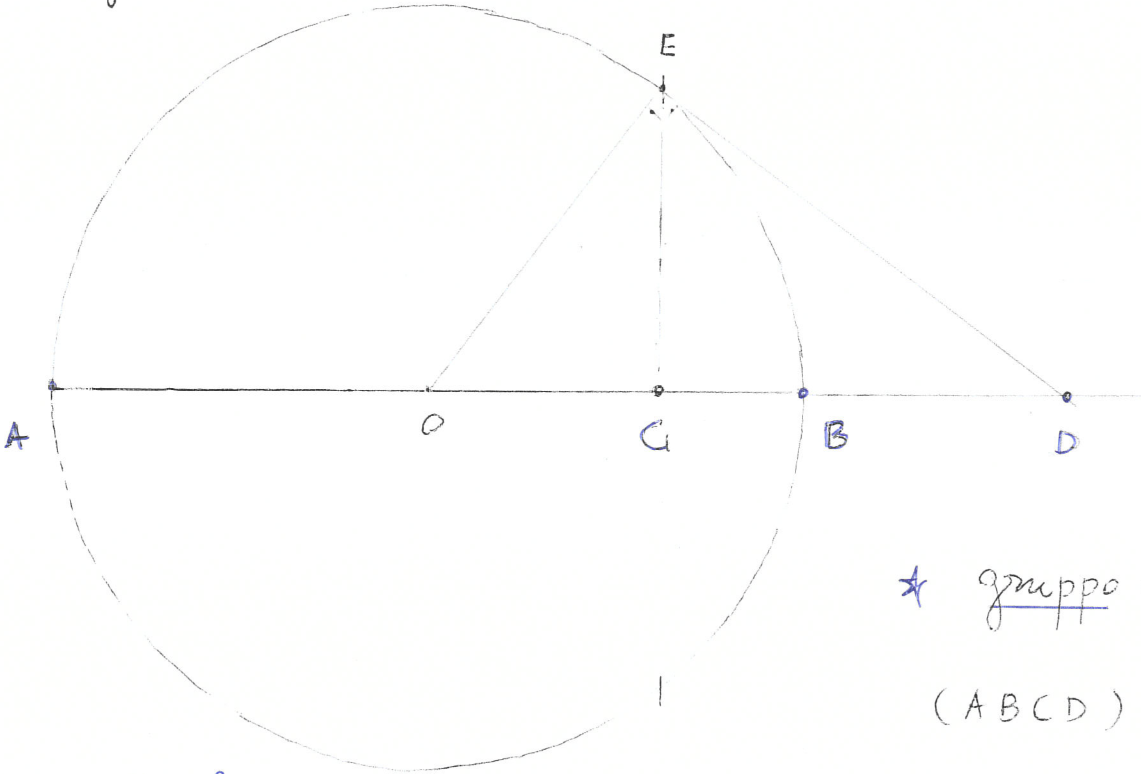
$$\Rightarrow \quad c = \frac{a - rb}{1 - r} \qquad d = \frac{a + rb}{1 + r}$$

Sia O, origine, p.to medio di $AB \Rightarrow b = -a$

$$\Rightarrow \quad c = a\,\frac{1 + r}{1 - r} \qquad d = a\,\frac{1 - r}{1 + r}$$

$$\Rightarrow \quad a^2 = cd \quad \Rightarrow \quad OA^2 = OB^2 = OC \cdot OD$$

☆ Conseguenza importante



☆ gruppo armonico

$(ABCD) = -1$

☆☆ inversione circolare

$$OC \cdot OD = OA^2 = OB^2 \quad (= OE^2)$$

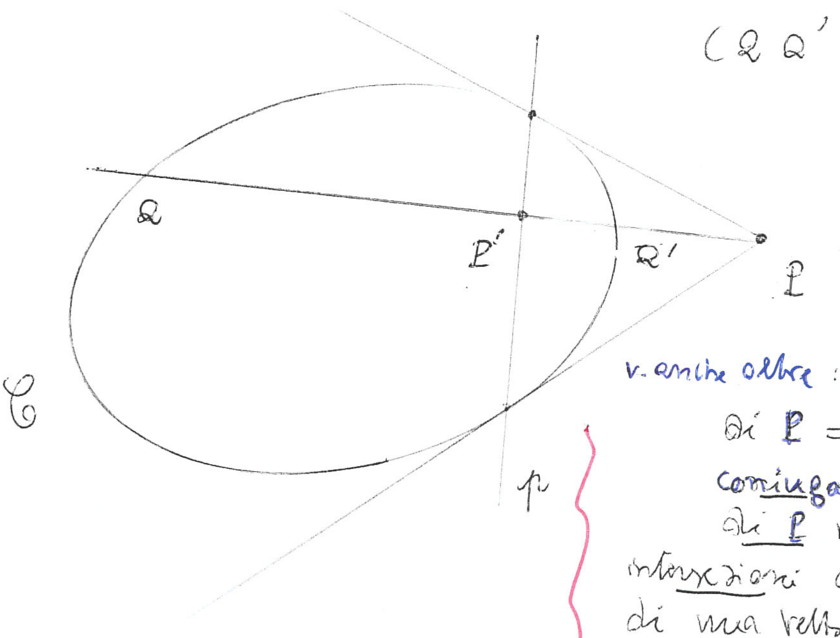
☆ interpretazione geometrica tramite il I teorema di Euclide applicato al triangolo rettangolo OED

$\Downarrow$

!

(prescindendo da considerazioni metriche)
invarianza per proiezioni e sezioni

$(Q\,Q'\,P'\,P) = -1$



Intermezzo

Come riportare in gabbia un leone L scappato al domatore D?

R:

gabbia

Il domatore va nella gabbia e si allinea col centro e col leone

si opera un' inversione circolare... leone in gabbia e domatore fuori.

☆☆☆

v. anche oltre: polare p di P = luogo dei coniugati armonici di P rispetto alle intersezioni con la conica di una retta generica del fascio di centro P

Costruzione duale della retta di un fascio quarto armonico di tre rette date