★ Proiettività (omografia) tra forme di prima specie:
collineazione

Corrispondenza biunivoca che conserva i gruppi armonici (von Staudt). Equivalentemente, conserva i birapporti

[nota: per semplificare la trattazione introduciamo il birapporto per via metrica]

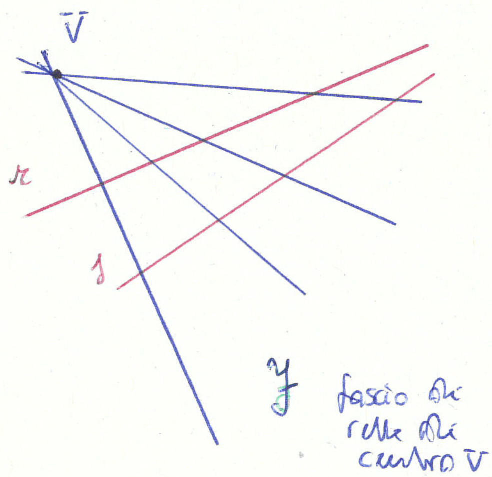
il birapporto è invariante per proiezioni e sezioni

Richiamiamo le definizioni seguenti:

- forme (della stessa specie) prospettive: sono l'una proiezione dell'altra o, se sono omonime, ambedue proiezioni / sezioni di una medesima forma

- due forme della stessa specie si dicono riferite tramite proiezioni e sezioni se si ottengono l'una dall'altra attraverso un numero finito di prospettività.

ex: nel piano



r e y e così s e y sono prospettive: $r(s)$ è sezione di y
y è proiezione di r (s) (da V)
r e s sono prospettive (in quanto sezioni di y)

V2

MATEMATICHE COMPLEMENTARI II

Prof. Mauro Spera
UCSC Brescia

Lezione XXIV

☆☆☆ Teorema fondamentale della geometria proiettiva
(von Staudt – dim. di Enriques)

1. Esiste una proiettività tra due forme di prima specie in cui a tre elementi dell'una corrispondono tre elementi dell'altra.

2. Questa proiettività è unica e si può porre mediante un numero finito di proiezioni e sezioni

Dim. La dimostrazione consiste dei tre passi seguenti:

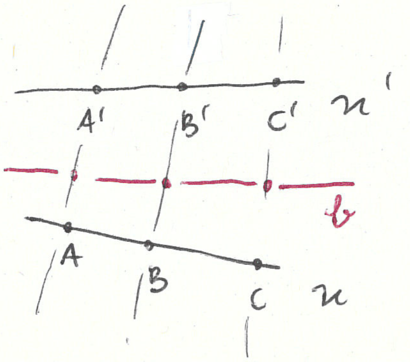
① si prova 1, e si ottiene con un numero finito di proiezioni e sezioni

② se esistessero due proiettività siffatte, si arriverebbe ad una proiettività non identica con tre elementi uniti (② è semplice)

③ Si dimostra che se in una proiettività vi sono tre elementi uniti, allora tutti gli elementi sono uniti, ovvero, la proiettività in questione è l'identità.

Questo è il passo più delicato (ed è il teorema di von Staudt propriamente detto)

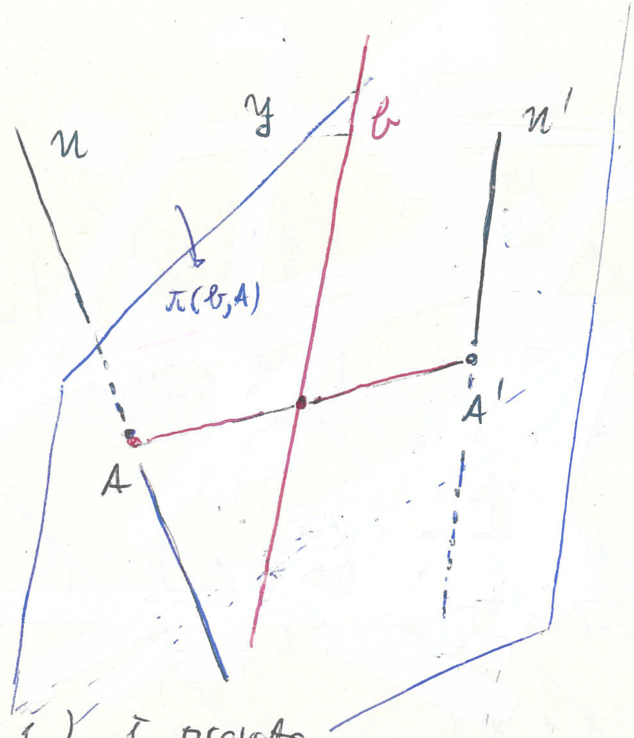
Proviamo ①: tramite proiezioni e sezioni possiamo ricondurci alla situazione seguente: le due forme di prima specie r, r' sono rette sghembe, in cui siano scelti pti distinti A, B, C e A', B', C', risp.



ora, le rette AA', BB', CC' sono sghembe
si scelga b appoggiantesi ad esse e proiettiamo r su r' da b:
Sia $\pi:(b, A)$ il piano contenente A e b: esso incontra r' in A'

Notare: siamo ricorsi a nozioni spaziali

(+) b si appoggia ad AA', BB', CC'



proiezione da b — sezione

$r \longrightarrow y \longrightarrow r'$

fascio di piani di asse b

$A \longmapsto \pi(b,A) \longmapsto A' = \pi(b,A) \cap r'$

Analogamente

$B \longmapsto B'$

$C \longmapsto C'$

① (ovvio) è provato.

② è chiara

③ può essere dimostrato in modo semplice, se introduciamo il birapporto di quattro elementi di una forma di prima specie per via metrica (ciò che è stato evitato da von Staudt)

Procedendo in questo modo, basta allora osservare che

se $(A, B, C, D) = (\overset{A'}{\overset{\shortparallel}{A}}, \overset{B'}{\overset{\shortparallel}{B}}, \overset{C'}{\overset{\shortparallel}{C}}, D')$, allora $D = D'$

in coordinate (supponendo i pti propri, per semplicità)

$$(ABCD) = \frac{x_A - x_C}{x_B - x_C} : \frac{x_A - x_D}{x_B - x_D} = r$$

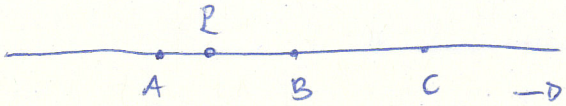
x_A

$$\Rightarrow \frac{x_A - x_C}{x_B - x_C} \cdot \frac{x_B - x_D}{x_A - x_D} = r \Rightarrow x_D \text{ è univocamente}$$

univocamente individuato da r

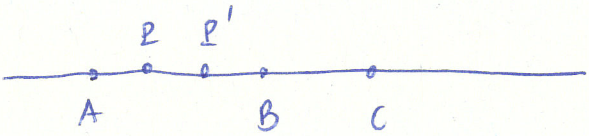
(+) Si ricordi che la totalità delle rette che si appoggia a tre rette sghembe dà vita ad una quadrica a pti iperbolici (i.e. rigata)

Descriviamo l'argomento di von Staudt **

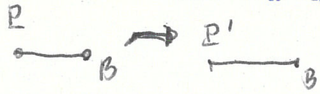


Sia $P \mapsto P' \neq P$; se P cade tra A e B, anche P' deve farlo

(poiché PC separa AB, e così deve accadere per $P'C$



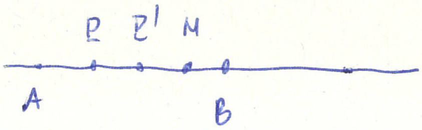
Supponiamo che P' segua P nell'ordine assegnato



** qui si usa la continuità

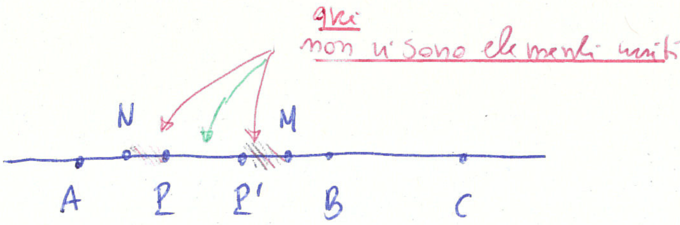
Se ora P descrive PB, P' descrive $P'B$ nello stesso senso

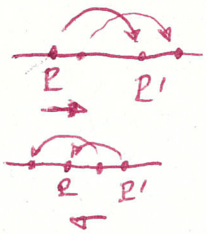
Esiste allora in $P'B$ un primo elemento unito M tale che in $P'M$ non vi siano altri elementi uniti



Ragionando sulla proiettività inversa

esiste N unito in PA tale che in PN non cadono altri elementi uniti





* dunque $NM \subset AB$ N e M sono uniti e non vi sono altri elementi uniti in NM.

Ma ora si consideri C', coniugato armonico di C rispetto a M,N, che cade in MN, e pertanto non è unito.

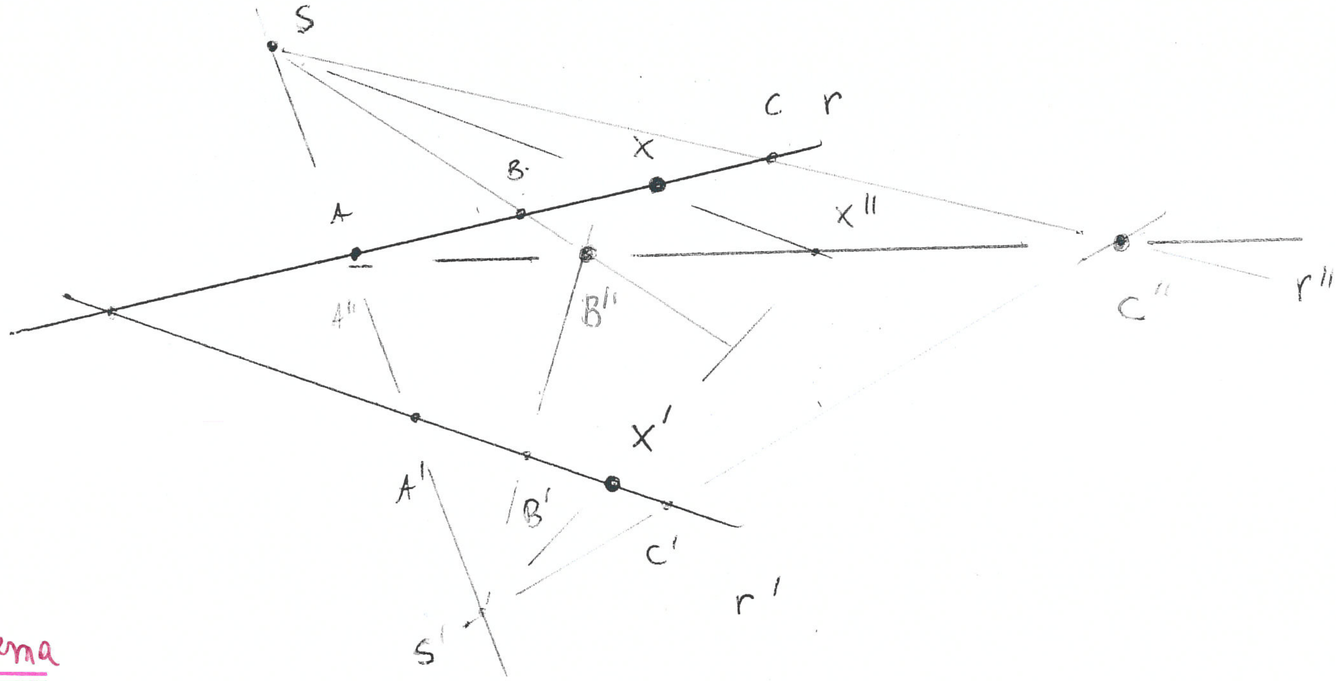
Ma a $(MNCC')$ deve corrispondere $(MNCC'')$ $\Rightarrow$ $C' = C''$

gruppo armonico gruppo armonico

$\Rightarrow$ C' è unito. Assurdo

Dunque tutti i punti di AB sono uniti. Analogamente si provano gli altri casi. In definitiva, l'omografia data è l'identità. □

* Si noti che si sono usati solamente gruppi armonici..



44 Teorema

Sinonimi: $\left\{ \begin{array}{l} \text{proiettività} \\ \text{omografia} \end{array} \right.$ di collineazione

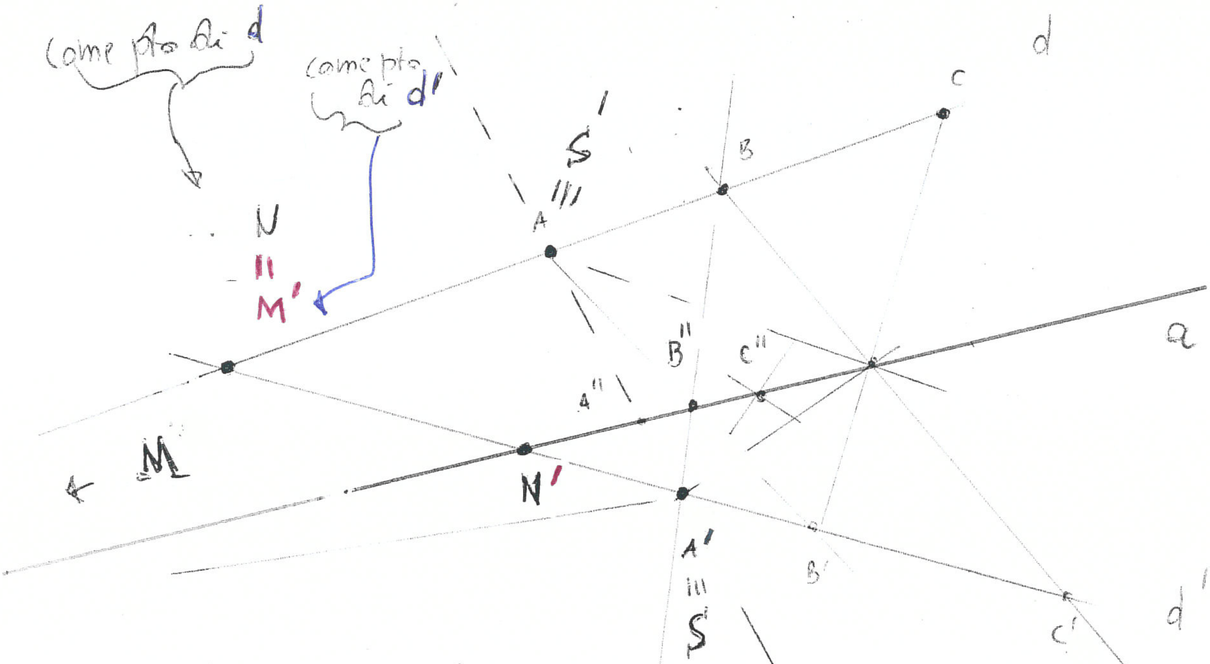
Ogni collineazione tra due rette distinte è il prodotto di due prospettività

(una collineazione è individuata dalle immagini di tre pti distinti)

si scelgono S, S' distinti, lungo AA' (per fissare le idee (e non coincidenti con questi)

Si considerino le proiezioni (prospettività) di centri S e S'. Sia $B'' = SB \cap S'B'$, $C'' = SC \cap S'C'$. La retta $r'' = B''C''$ è prospettiva sia ad r che a r'. E' facile poi costruire l'immagine X' di $X \in r$: si trovi $X'' = SX \cap r''$ e conseguentemente $X' = S'X'' \cap r'$

In particolare, risulta definito l'asse di collineazione di una proiettività, prendendo $S = A'$, $S' = A$.
La definizione è ben posta poiché (v. figura)



$a \cap d'$ $= N' \in a$ $\qquad$ $a \cap d$ $= M \in a$

a è determinato pertanto da M ed N' e la costruzione di questi ultimi non dipende da A, A', (coppie corrispondenti)

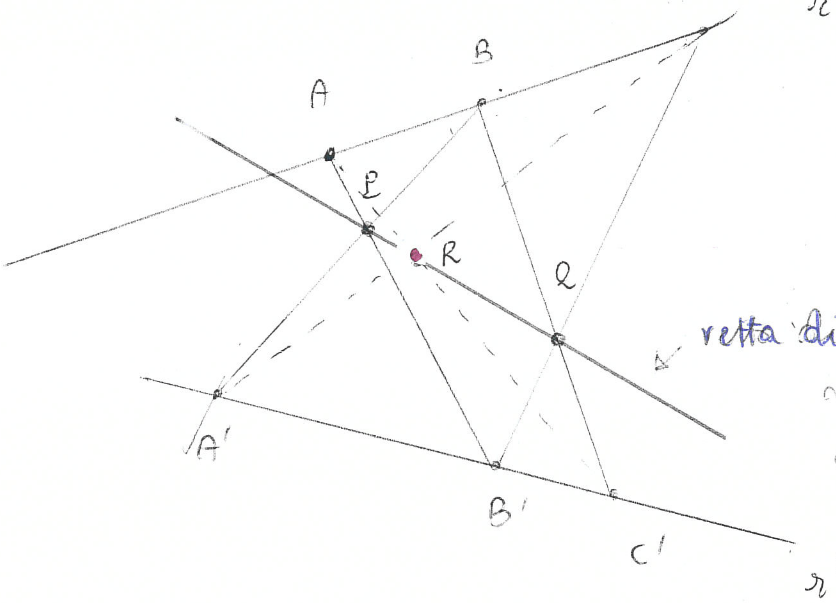
pertanto, i punti $AB' \cap A'B$, $AC' \cap A'C$, $BC' \cap B'C$ sono allineati (sull'asse di collineazione). Poiché una proiettività è univocamente determinata dalle immagini di tre pti distinti, si ha, come corollario, il

☆☆☆ teorema di Pappo

teorema di Pappo

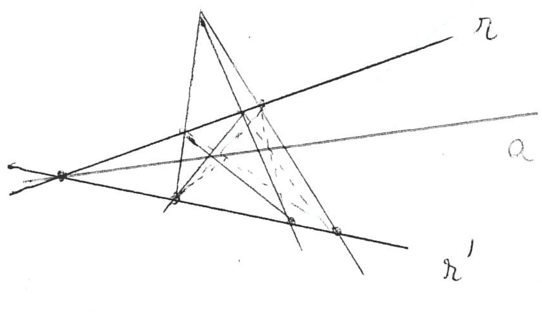
r, r' rette distinte A, B, C su r distinti A', B', C' su r' distinti

$P = AB' \cap A'B$, $Q = BC' \cap B'C$, $R = AC' \cap A'C$ sono allineati



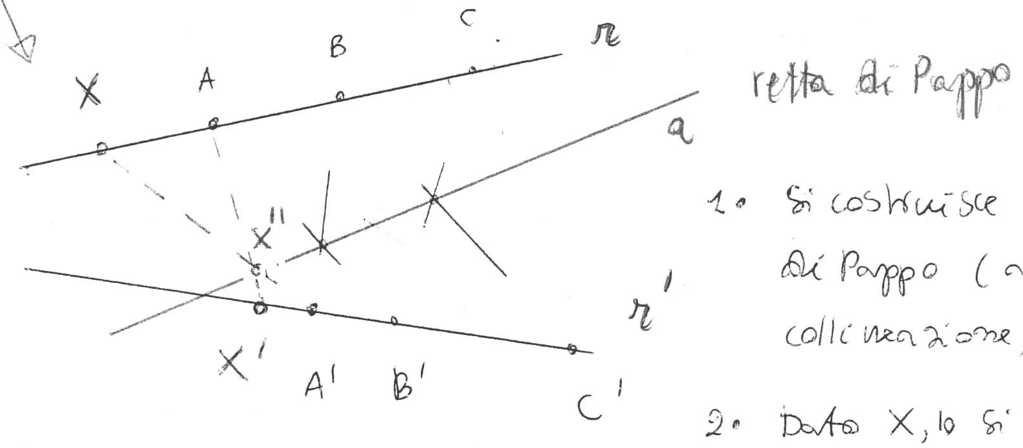
retta di Pappo ≡ asse di collineazione della proiettività $\pi\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix}$

<u>Osservazione</u> La retta di Pappo passa per $r \cap r'$ $\Leftrightarrow$ π è una prospettività



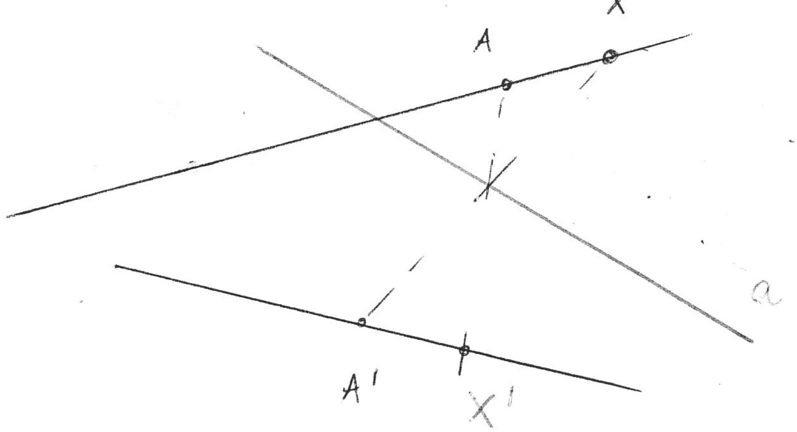
Il teorema di Pappo è un caso particolare del teorema di Pascal sulle coniche. (v. oltre)

In definitiva, è possibile la seguente semplice costruzione grafica di una proiettività tra $r \neq r'$



1. Si costruisce la retta di Pappo (asse di collineazione) a
2. Dato X, lo si congiunge con A' (per fissare le idee), determinando l'intersezione $X'' = a \cap A'X$
3. Si ha $X' = AX'' \cap r'$

Di conseguenza, una proiettività tra r e r' è determinata anche fissando l'asse di collineazione e l'immagine di un punto (ex A' in figura)



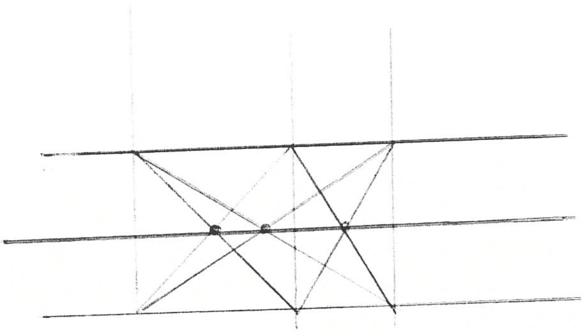
La collineazione della figura non è una prospettività (perché?)

Osservazione

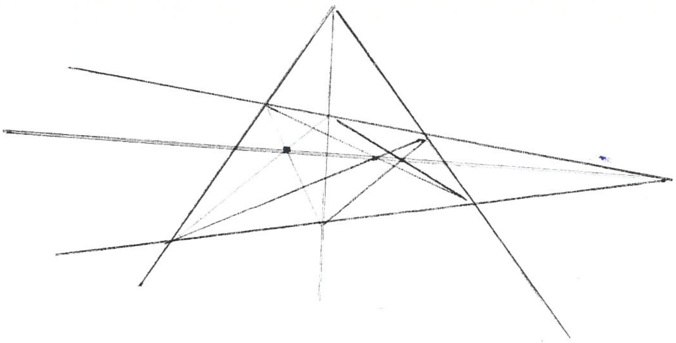
un teorema di Pappo "parziale" [per la prospettività]

col metodo di Poncelet:

si prova il risultato in casi particolari semplici e si sfrutta l'invarianza per proiezioni e sezioni

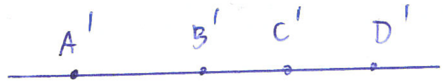


$\rightsquigarrow$



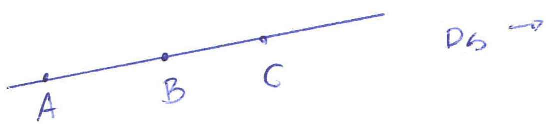
★ Problema: data una foto della facciata di una chiesa, ad esempio, con due ordini di colonne, come determinare il rapporto delle loro altezze?

R:

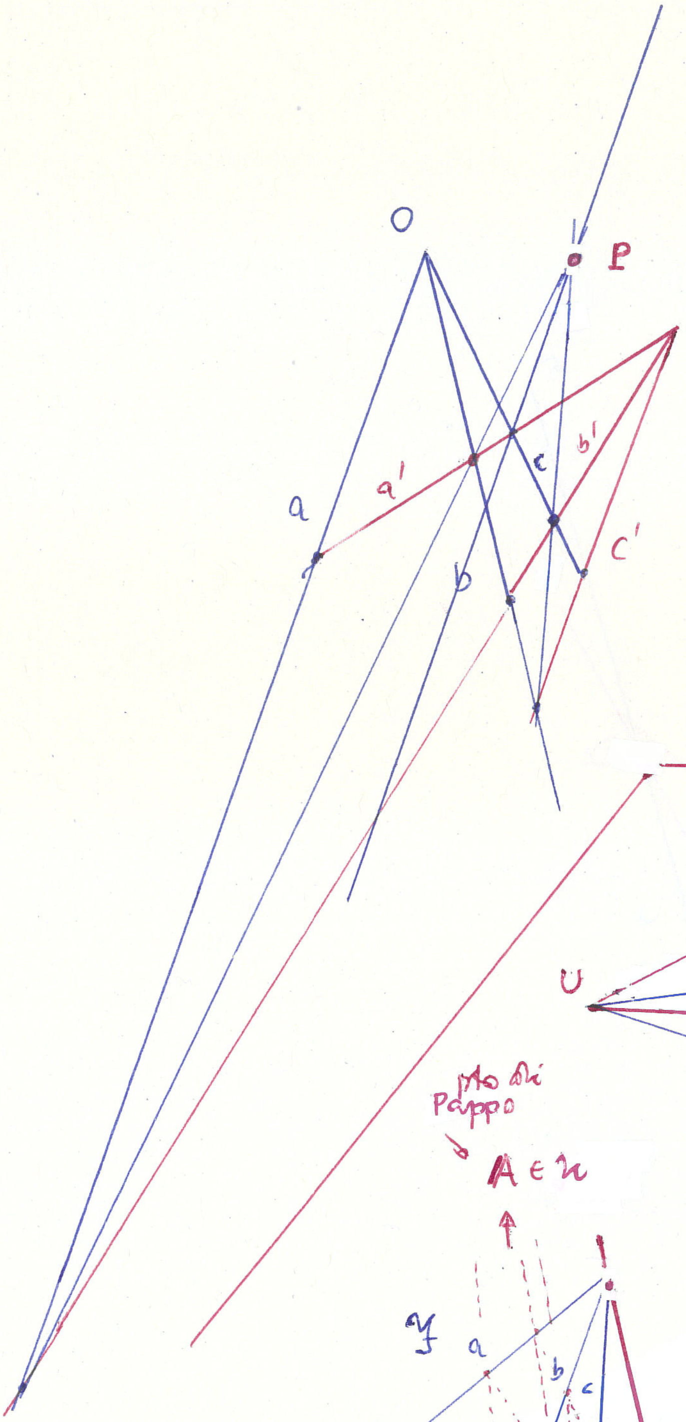


← pto di fuga delle verticali

nella realtà



★ Sussiste la collineazione $A \mapsto A'$ ecc. e pertanto $(A,B,C) = (A\,B\,C\,D_\infty) = (A'B'C'D')$ ⇒ calcolabile



$\downarrow a \wedge c'$

due fasci prospettivi

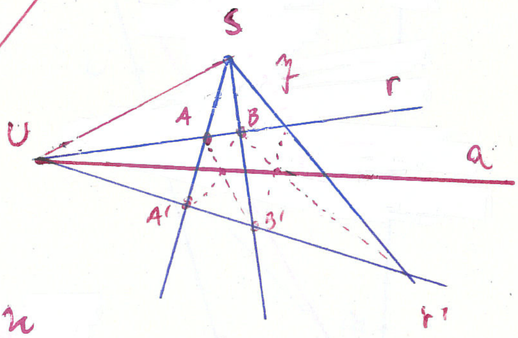
determinare, dualmente, il punto di Pappo P

pto di intersezione di $a' \wedge b$ ecc.

$(a' \wedge b)(b' \wedge a)$

$(b \wedge c')(b' \wedge c)$

$(a \wedge c')(a' \wedge c)$



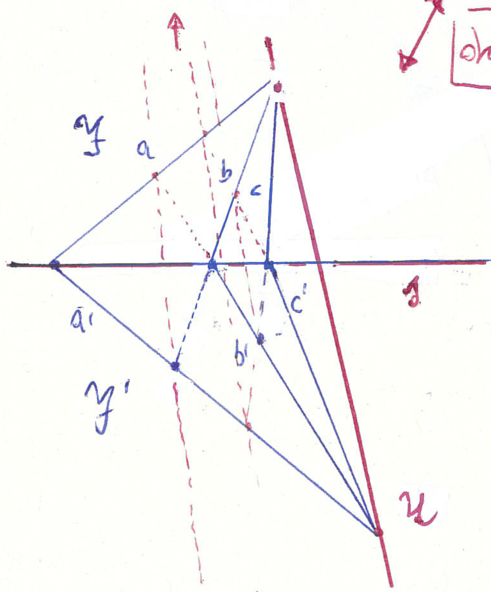
r r' sezioni di 𝒴

(r, r' prospettive)

pto di Pappo

A ∈ u

dualità



𝒴 e 𝒴' proiezioni di s

(𝒴, 𝒴' prospettivi)

A, A', B, B' allineati con S

$a \cap a'$, $b \cap b'$ .. ∈ s

U unito

u unita

a asse di collineazione

A : punto di Pappo (non mostrato)

S ↔ s

U ↔ u

a ↔ A pto di Pappo

★ A ∈ u, poichè U ∈ a