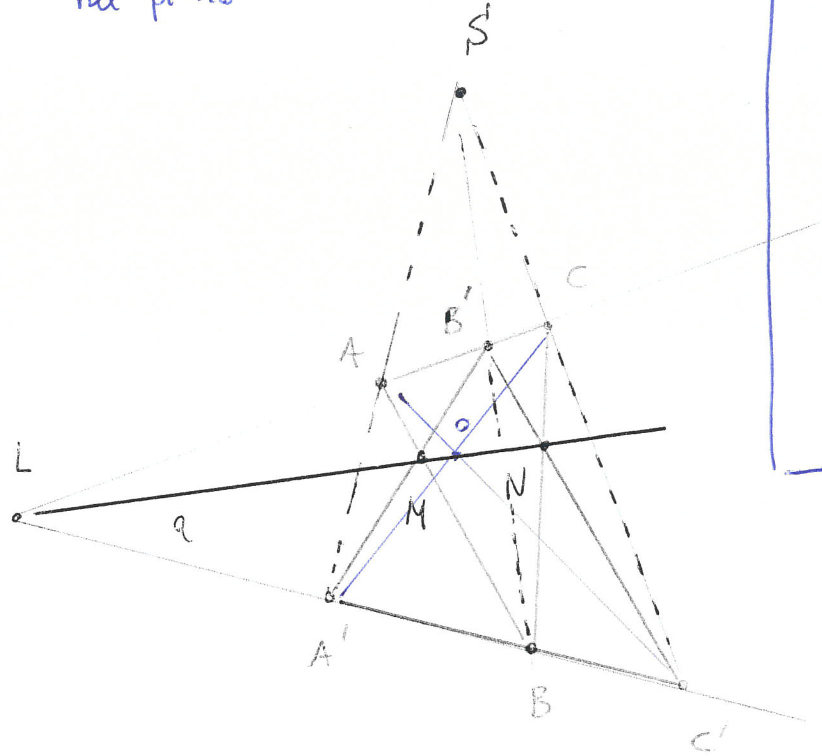
☆☆☆ Teorema di Desargues sui triangoli omologici

(vale per triangoli in piani diversi e nello stesso piano, ma in astratto, il teorema piano non può provarsi solo con assiomi piani)

I dim. analitica nel piano



se AA', BB', CC' concorrono in S, i punti

$M = AB \cap A'B'$,
$N = BC \cap B'C'$
$O = AC \cap A'C'$

sono allineati.

Viceversa, se M, N, O sono allineati, AA', BB', CC' concorrono in O (è il teorema duale)

dimostriamo "solo se": due triangoli prospettivi da un punto [ABC, $A'B'C'$, S, rispettivamente] lo sono da una retta [qui sarà $r = LM = MN = LN$]; ovvero, supponendo che AA', BB', CC' si incontrino in S, i punti $L = AC \cap A'C'$, $M = AB \cap A'B'$, $N = BC \cap B'C'$ sono allineati.

Il viceversa segue per dualità.

Poichè i punti A, B, C, S sono a tre a tre non allineati, possiamo istituire un riferimento proiettivo in cui $A = [0,0,1]$ (origine),

$B = [1,0,0]$ ("pto all'∞ dell'asse x")

$C_1 = [0,1,0]$ ("pto all'∞ dell'asse y")

$S = [1,1,1]$ pto unità

Allora, per opportuni $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, si avrà (v. fig.)

$$A' = S + \alpha A = [1, 1, 1+\alpha]$$
$$B' = S + \beta B = [1+\beta, 1, 1]$$
$$C' = S + \gamma C_1 = [1, 1+\gamma, 1]$$

poniamo $L = A' - C'$ $(\in A'C')$, $M = B' - A'$ $(\in A'B')$, $N = C' - B'$ $(\in B'C')$

i punti L, M, N sono allineati poichè $L + M + N = 0$

ed è altresì:

$$L = [0, -\gamma, \alpha] \in AC_1 \cap A'C'$$
$$M = [\beta, 0, -\alpha] \in AB \cap A'B'$$
$$N = [-\beta, \gamma, 0] \in BC \cap B'C'$$

e ciò prova l'asserto. $\square$

<u>variante</u>: calcoliamo, ad es. $AB \cap A'B'$ in modo standard

AB: $x_2 = 0$ (l'asse x)

$A'B'$:
$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & 1+\alpha \\ 1+\beta & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$AB \cap A'B'$:
$$\begin{cases} \begin{vmatrix} x_1 & 0 & x_3 \\ 1 & 1 & 1+\alpha \\ 1+\beta & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1(1-1-\alpha) + x_3(1-1-\beta) = 0$$

$$\alpha x_1 + \beta x_3 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha x_1 + \beta x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow AB \cap A'B' = [\beta, 0, -\alpha] = M := B' - A'$$

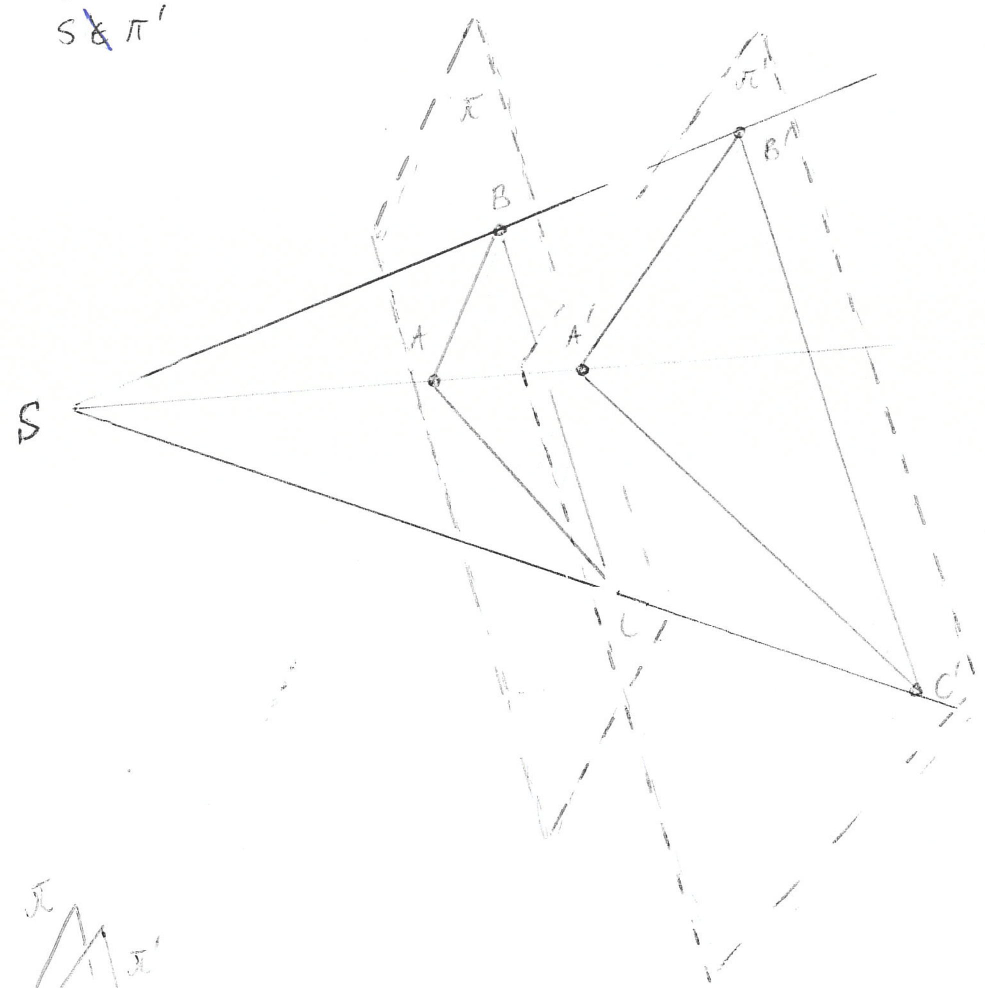
e analogamente per gli altri punti.

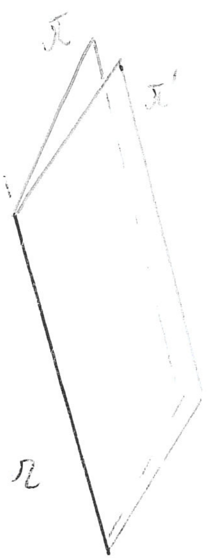
<u>Osservazione</u>. La dimostrazione è stata condotta interamente nel piano senza problemi. Il motivo è che, tacitamente, il piano è <u>coordinatizzato</u> (tramite il campo reale).
Per la validità del teorema di Desargues in un <u>piano</u>, questo deve essere coordinatizzato tramite un <u>corpo</u>.

II dim. sintetica [è necessario passare attraverso una costruzione spaziale ("esistenza di piani non-desarguesiani")]

Analizziamo il caso in cui i triangoli giacciono su piani distinti, e $S \notin \pi$, $S \notin \pi'$

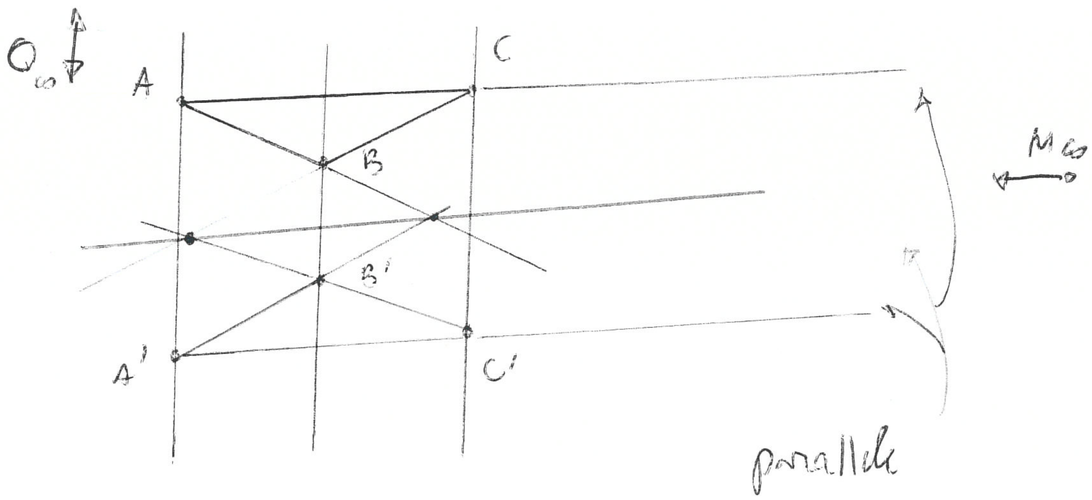
☆ nota: se i piani π e π' si sovrappongono (e $S \in \pi \equiv \pi'$) si può arrivare al risultato ad esempio con opportuni passaggi al limite da una situazione spaziale





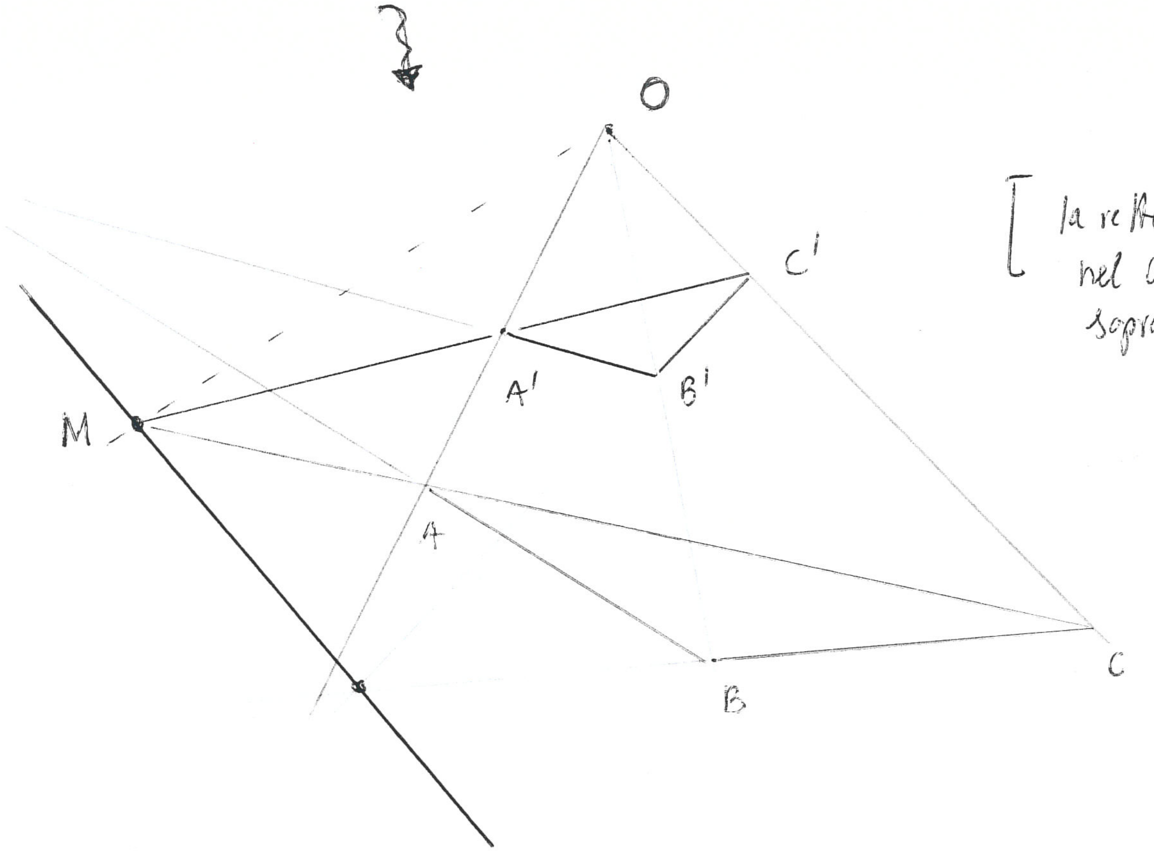
i piani π e π' (distinti) danno vita a $r = \pi \cap \pi'$. Le rette AB e $A'B'$ sono complanari (entrambe nel piano SAB, per es.), e sono pertanto incidenti in $P_1 \in r$. Lo stesso può dirsi per gli altri lati corrispondenti, sicché i punti P_1, P_2, P_3 (notazione ovvia) sono allineati (su r)

III



ABC A'B'C' omologhi

$AC \parallel A'C'$

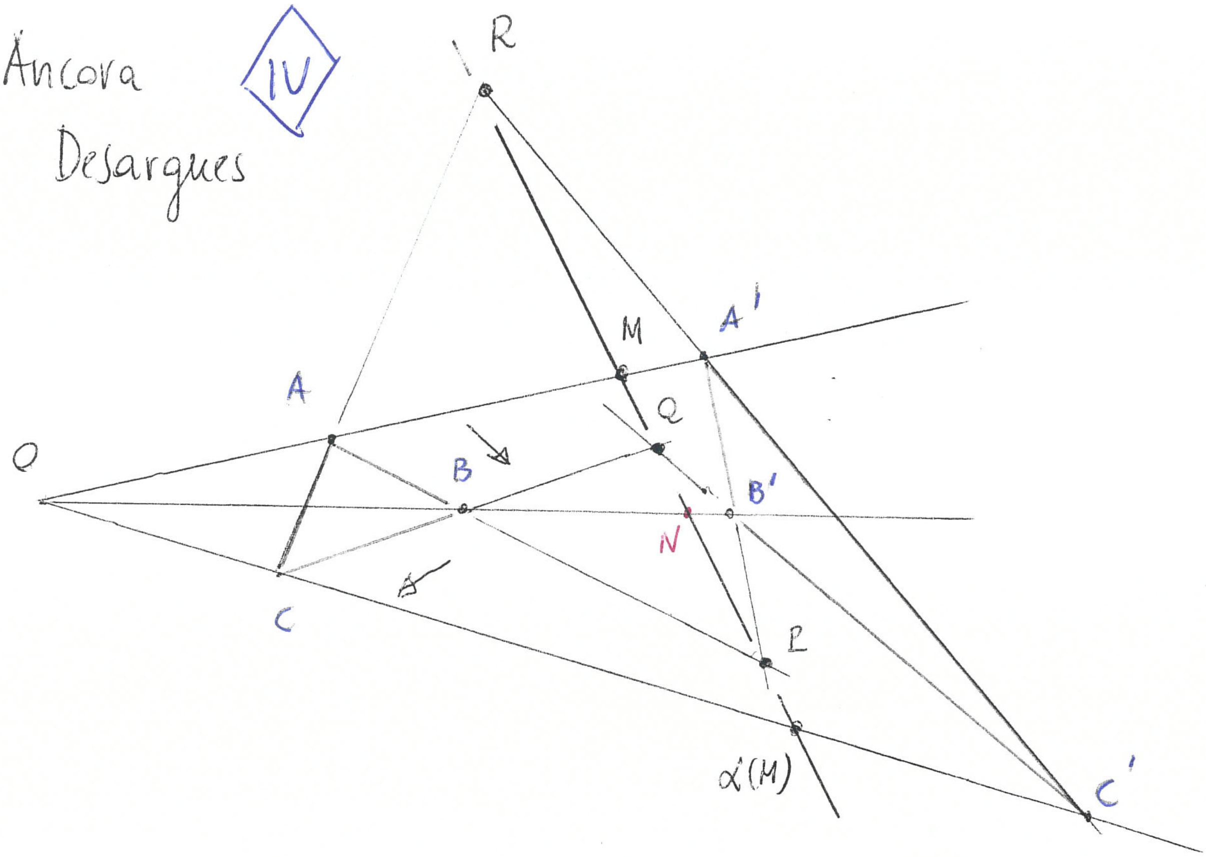


[la retta OM è, nel caso particolare sopra, impropria]

☆ il teorema di Desargues col metodo di Poncelet

Ci si pone nei casi particolari in cui il teorema è semplice, e si usa l'invarianza per proiezioni e sezioni

Ancora Desargues (IV)



Siano AA', BB', CC' concorrenti (in O)

consideriamo l'omografia $\alpha : AA' \to CC'$

composta dalla prospettività $\pi_P : AA' \to BB'$, proiezione da

P $= AB \cap A'B'$ e $\pi_Q : BB' \to CC'$, proiezione da Q $= BC \cap B'C'$

$(\alpha = \pi_Q \circ \pi_P)$; allora α : $A \mapsto C$, $A' \mapsto C'$ e $O \mapsto O$ $= AA' \cap CC'$

⇒ è una prospettività, di centro R $(= AC \cap A'C')$

$M := PQ \cap AA'$ $\in PQ$ (banalmente) e così

⇒ $\alpha(M) \in PQ$ (poiché $M \xrightarrow{\pi_P} N \xrightarrow{\pi_Q} \alpha(M)$: ci si muove lungo PQ)

Ma allora, poiché $M\alpha(M)$ passa per R, e

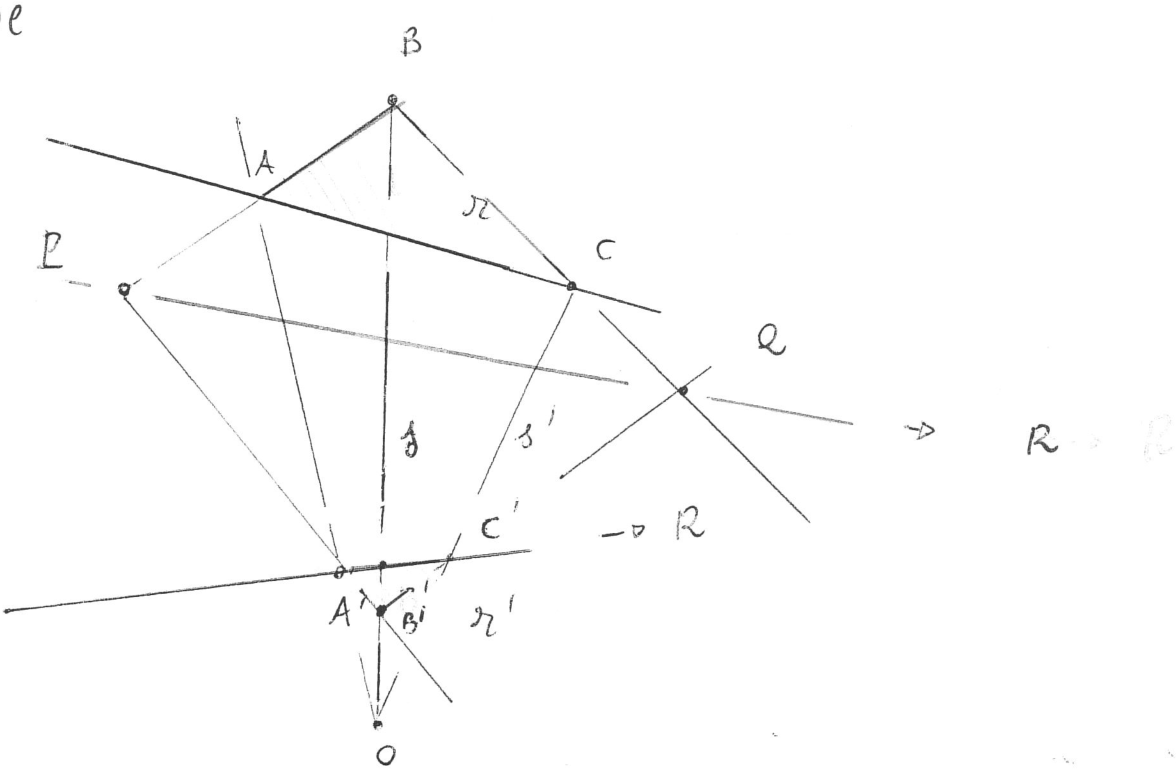
$M, \alpha(M) \in PQ$, è $M\alpha(M) = PQ$,

sicché R, P, Q sono allineati

[il reciproco è l'affermazione duale]

Notare che apparentemente non si è fatto uso di costruzioni spaziali. Tuttavia, ci siamo appoggiati al teorema fondamentale della geometria proiettiva, in cui ne abbiamo fatto uso!

Applicazione

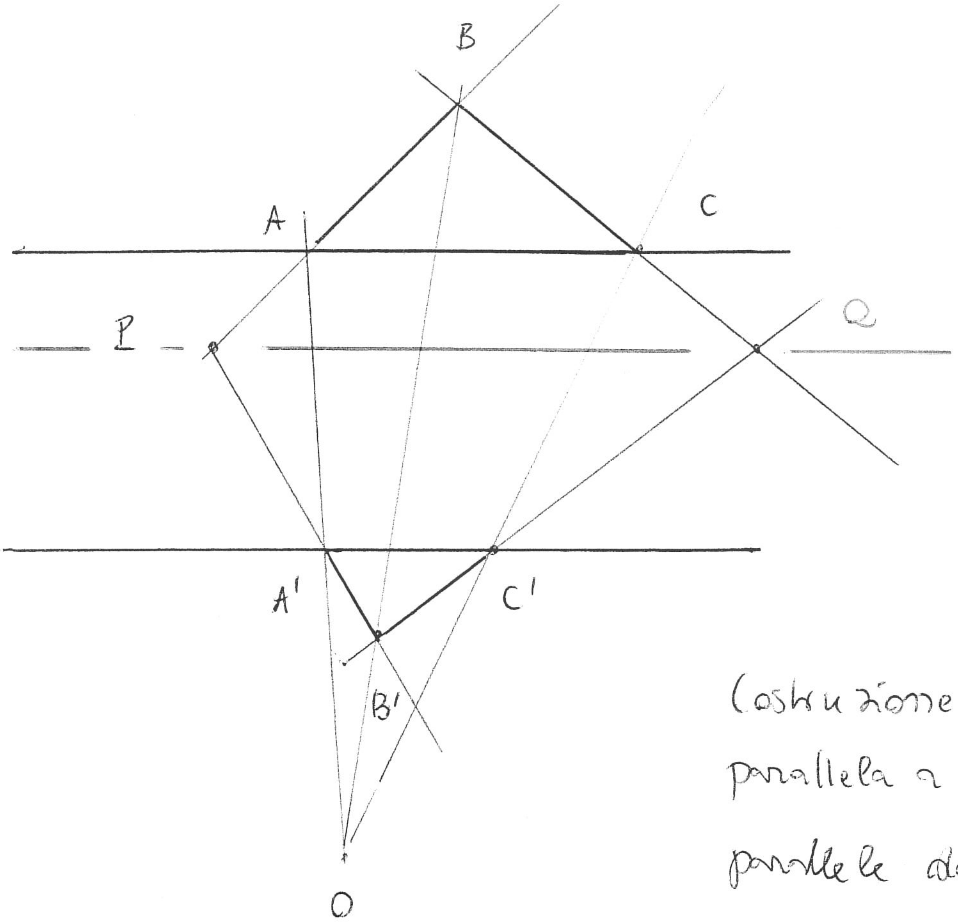


tracciamo la retta per P e per $r \cap r' \equiv R$
(senza usare quest'ultimo, che in concreto può risultare inaccessibile (se l'intersezione si trova fuori dal foglio, o, in particolare, se $r \parallel r'$).

L'idea è usare il teorema di Desargues: costruiamo due triangoli omologici di cui r, r' siano lati omologhi.

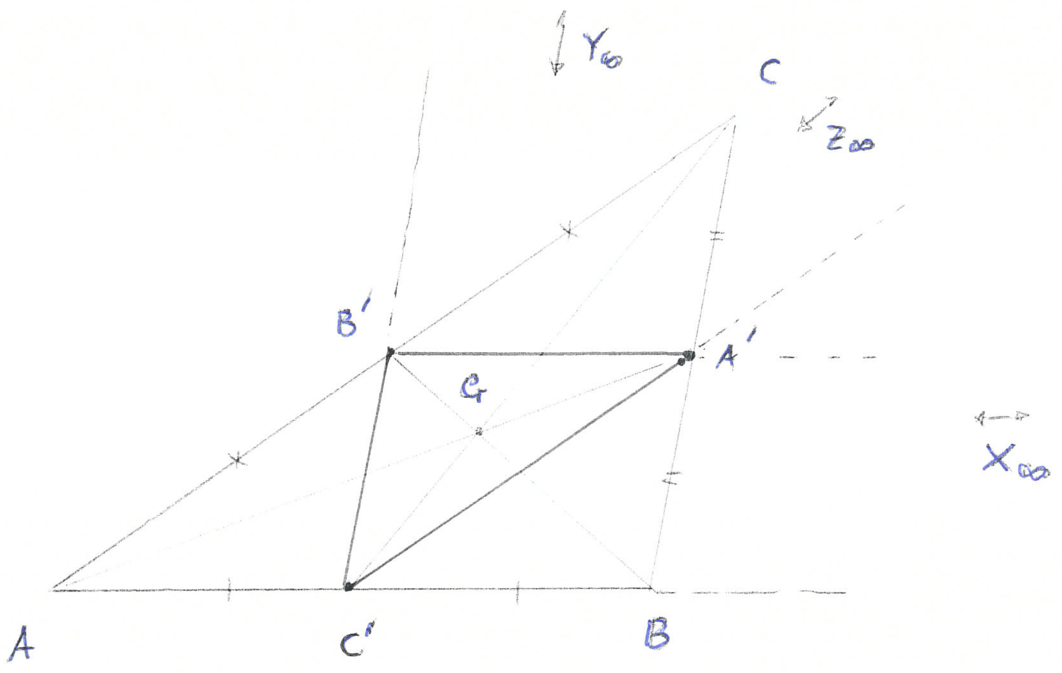
1. Scegliamo A su r, A' su r', e su AA' scegliamo un punto O ($\notin \{A, A'\}$). Tracciamo PA, PA'
2. Da O tracciamo s, e siano $B = PA \cap s$, $B' = PA' \cap s$
3. Da O tracciamo s', determinando $C \in r$, $C' \in r'$.

I triangoli ABC, $A'B'C'$ sono omologici, sicché P, $Q := BC \cap B'C'$ e R sono allineati.
La retta cercata è dunque PQ.



Costruzione della parallela a due rette parallele date, per P non appartenente ad esse (con la sola riga)

Applicazione del teorema di Desargues



Le mediane di un triangolo si incontrano in uno stesso punto (G: baricentro del triangolo)

Infatti il triangolo $A'B'C'$ individuato dai punti medi dei lati CB, AC, AB, rispettivamente, è omologo ad ABC: posto $X_\infty := AB \cap A'B'$ ($AB \parallel A'B'$), $Y_\infty := BC \cap B'C'$, $Z_\infty := AC \cap A'C'$,

X_∞, Y_∞, Z_∞ sono evidentemente allineati (sulla retta impropria), e pertanto le congiungenti i vertici corrispondenti si intersecano in un punto comune, G.

(* commento: un'altra possibile dimostrazione utilizza il teorema di CEVA v. note Elementi di geometria)