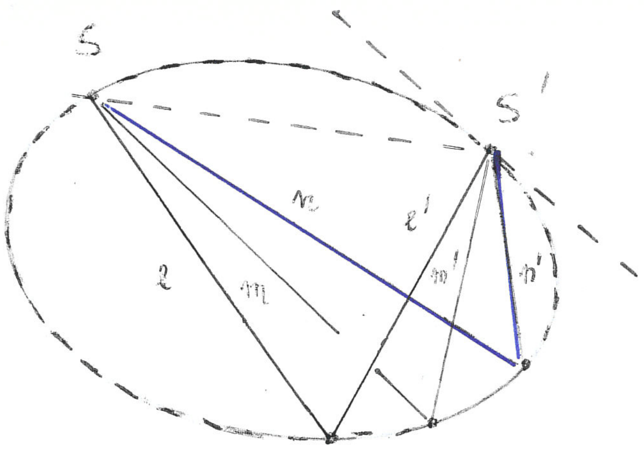
*** Generazione proiettiva delle coniche (Steiner - Chasles)

V2

"I pti di incontro di rette corrispondenti in due fasci proiettivi, situati in un piano ma non sovrapposti, costituiscono una curva di second'ordine (conica) passante per i centri dei due fasci"



alla congiungente dei due pti, vista come retta del fascio di centro S, corrisponde la tangente alla curva in S', e viceversa (tramite un passaggio al limite)

Dim. (analitica)

eq. di n ("notazione stenografica")

Sia: $n = l + k\,m = 0$ una retta fissata del fascio di centro S

e, analogamente $n' = l' + k'm' = 0$
(retta corrispondente del fascio di centro S')

Imponiamo la proiettività dei due fasci ponendo $k' = k$

$$l + k\,m \longrightarrow l' + \underset{\underset{k'}{\parallel}}{k}\,m'$$

(k può essere visto come un birapporto)
che è conservato nella proiettività

Pertanto, da

$$\begin{cases} l + k m = 0 \\ l' + k m' = 0 \end{cases}$$

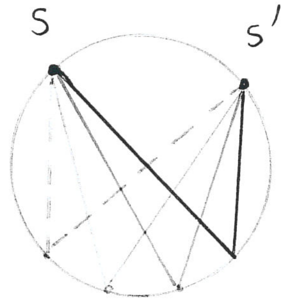
si ha, eliminando k

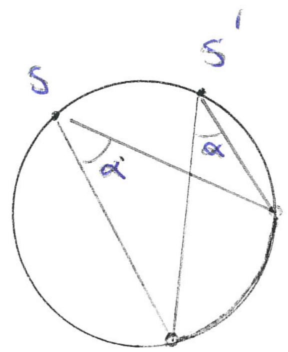
$$\boxed{l m' - l' m = 0} \qquad \mathcal{C}$$

che è di secondo grado

È chiaro poi che $S, S' \in \mathcal{C}$

Variante:



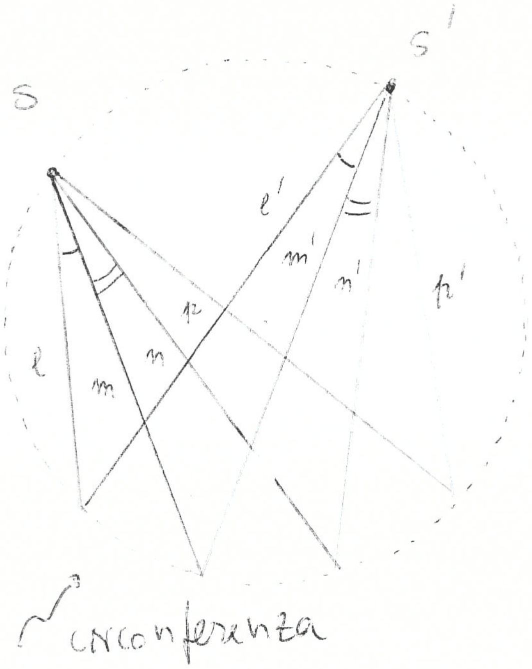


i rispettivi fasci di rette sono proiettivamente equivalenti (vengono conservati i birapporti, in virtù di

siccome nell'enunciato intervengono solo nozioni proiettive (grafiche), esso, in base al principio generale, deve valere per una conica qualsiasi (irriducibile)
Si giunge in tal modo al teorema di Chasles-Steiner

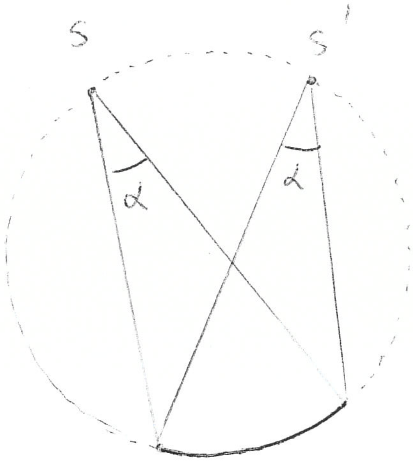
★★ La costruzione di Steiner

di una collineazione tra forme di prima specie sovrapposte



Premessa

i due fasci in questione sono proiettivi

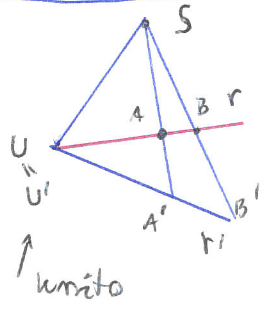


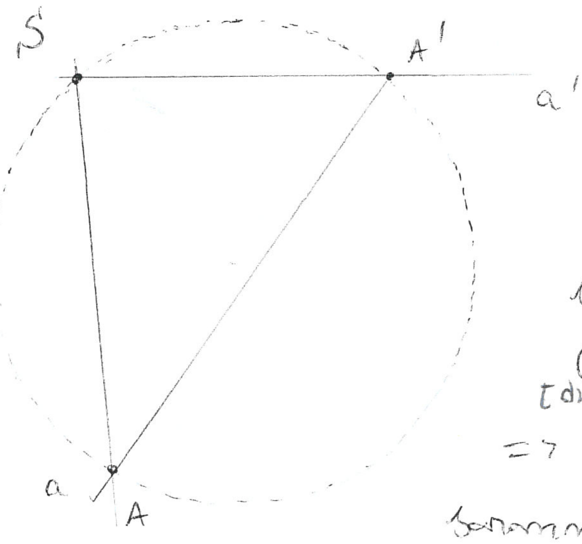
[=> segue la generazione proiettiva delle coniche]

Si considerino ora due forme di prima specie sovrapposte, ad esempio (non si perde in generalità) fasci di rette aventi lo stesso centro, proiettivi (propri)

$a\,b\,c \ldots \barwedge a'b'c'$

$A \mapsto A'$ $B \mapsto B'$ $U \mapsto U' = U$	prospettività da $S = AA' \cap BB'$





stesso proiettivi

$A'(ABC) \barwedge A(A'B'C')$:

essi sono prospettivi (+)

(AA' è unito)

[dualità]

=> $A'B \cap AB' \equiv M$ etc..

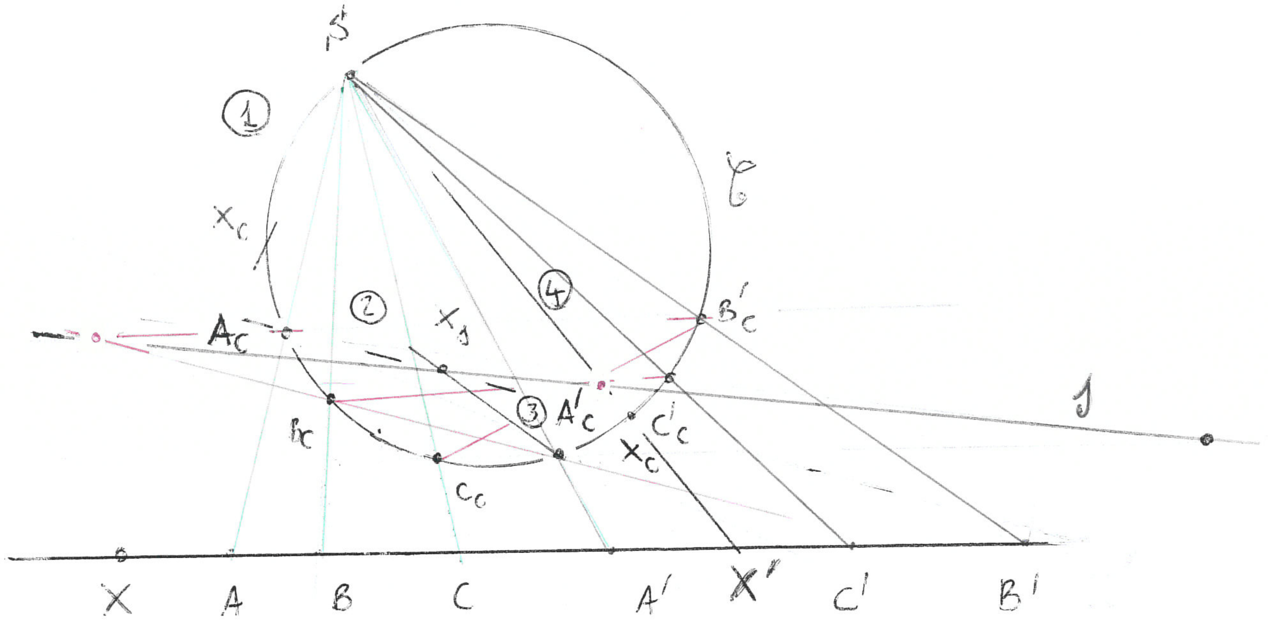
saranno allineati

(Pappo)

☆☆ Costruzione della proiettività tra punteggiate sovrapposte

$A \mapsto A'$
$B \mapsto B'$ col metodo di Steiner
$C \mapsto C'$

Si consideri una circonferenza $\mathcal{C}$ e $S \in \mathcal{C}$



Si hanno due fasci di centro S, proiettivi tra loro ($SA \leftrightarrow SA'$ ecc.).

Viene indotta una proiettività sulla $\mathcal{C}$
$A_C \leftrightarrow A_C'$ ecc.

Consideriamo la proiettività tra i fasci di rette di centri A_C e A'_C : $A_C B'_C \leftrightarrow A'_C B_C$ ecc.

la retta $A_C A'_C$ è unita ⇒ si tratta di una prospettività ⇒ si ha un asse di prospettività, determinato in modo ovvio, sia esso g

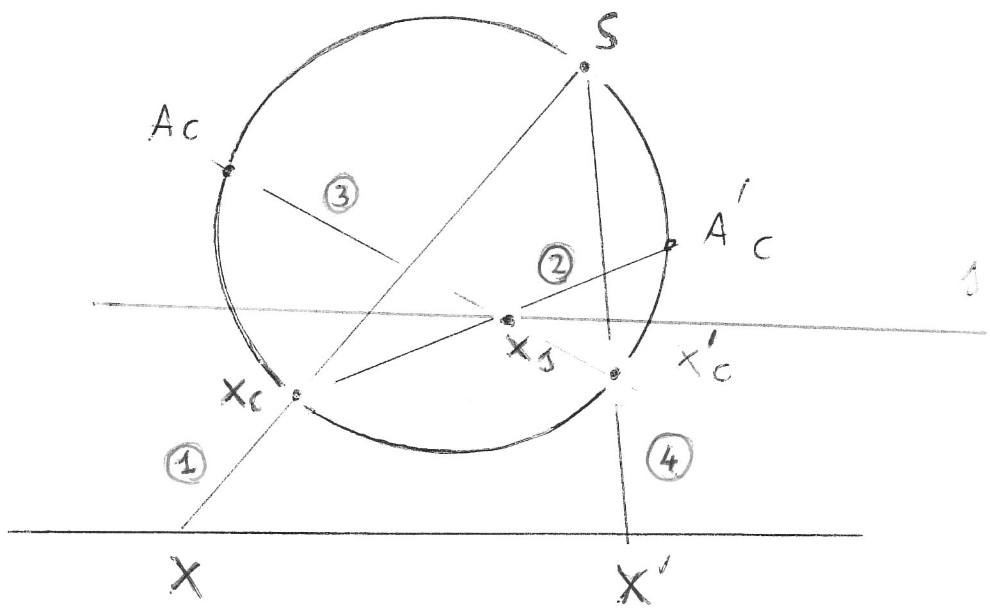
A questo punto, dato X, per trovare X'

(1) Si congiunge X con S, individuando X_C su $\mathcal{C}$

(2) Si congiunge X_C ad A'_C, individuando su s il pto X_s

(3) Si congiunge X_s ad A_C, individuando su $\mathcal{C}$ il pto X'_C

(4) Infine, si congiunge S a X'_C, individuando, su r, X'

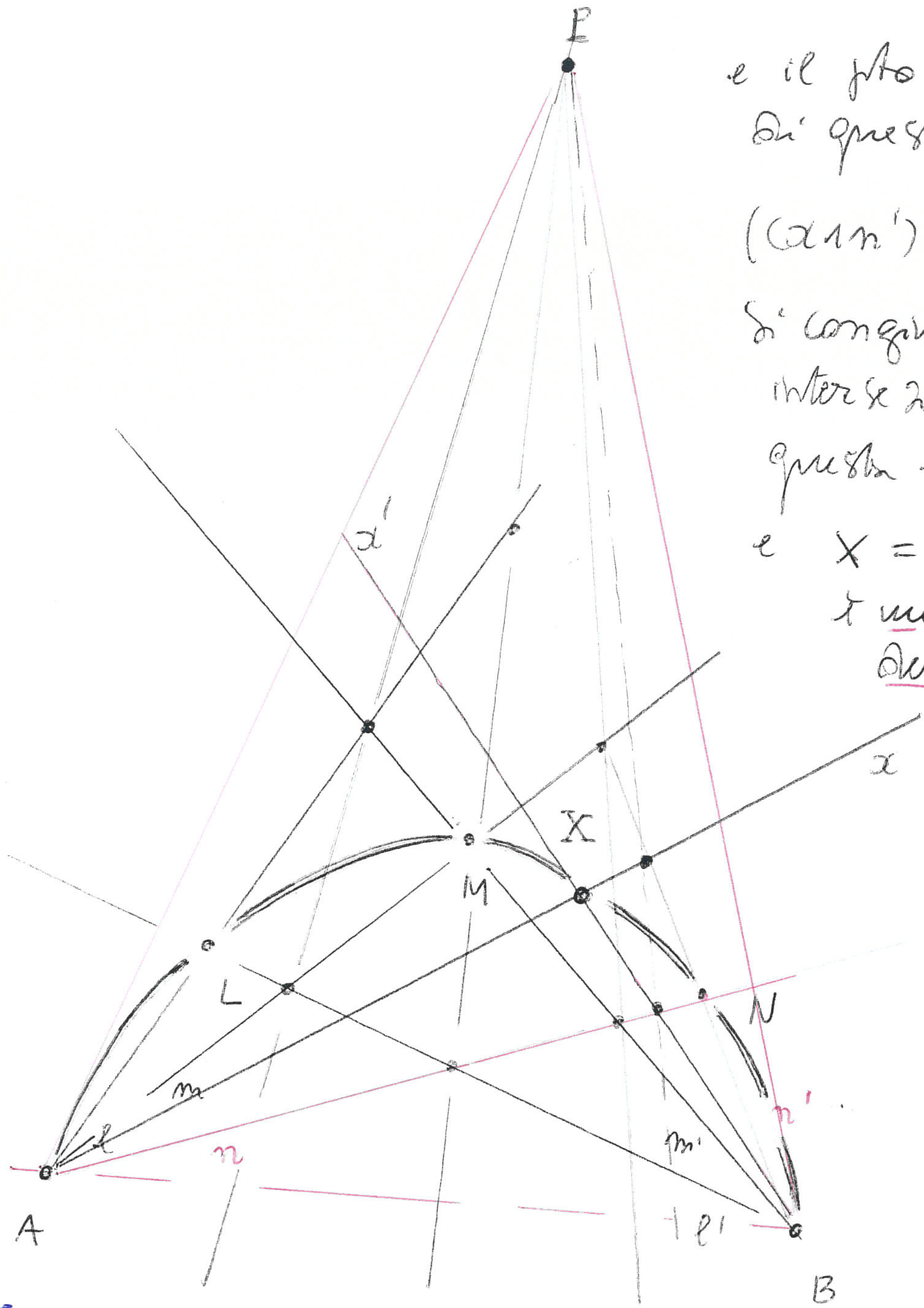


* <u>Costruzione della conica passante per A, B, L, M, N</u> distinti e a tre a tre non allineati: si scelgano ad esempio A e B. I fasci corrispondenti sono proiettivi. Determinato il pto di Pappo, scelta una retta x per A, si consideri per esempio $x \wedge n'$ e successivamente la retta $(x \wedge n') \cdot\cdot P$ e il pto di intersezione di questa con n,

$((x \wedge n')\ P) \wedge n$;

si congiunga tale intersezione con B: questa è la retta x'; e $X = x \wedge x'$ è un nuovo pto della conica.

Variando x nel fascio di centro A, si ottengono i pti della conica.



Le rette

$(l \wedge m') \cdot\cdot (l' \wedge m)$
$(l \wedge n') \cdot\cdot (l' \wedge n)$
$(m \wedge n') \cdot\cdot (m' \wedge n)$
$(x \wedge n') \cdot\cdot (x' \wedge n)$

concorrono nel pto di Pappo P

* La polare di P è AB, PA, PB sono le tangenti a $\mathcal{C}$ da P.

☆ Applicazione del teorema di Steiner - Chasles

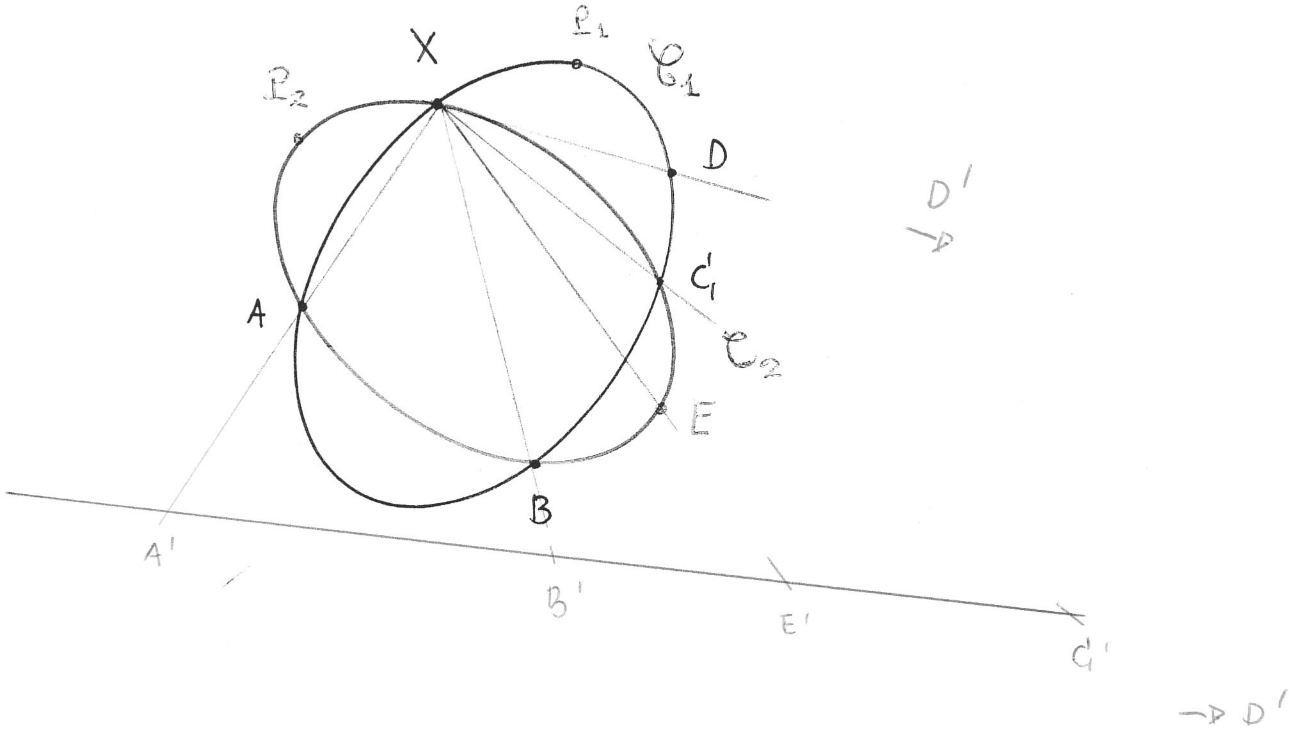
Sia data la pianta di una città. Si fotografi questa da un punto X e, sulla fotografia, si prendano cinque pti allineati A', B', C', D', E', corrispondenti di A, B, C, D, E sulla pianta. Si considerino le coniche

$$\mathcal{C}_1 = \{ P_1 \mid (P_1A, P_1B, P_1C, P_1D) = (A'B'C'D') \}$$

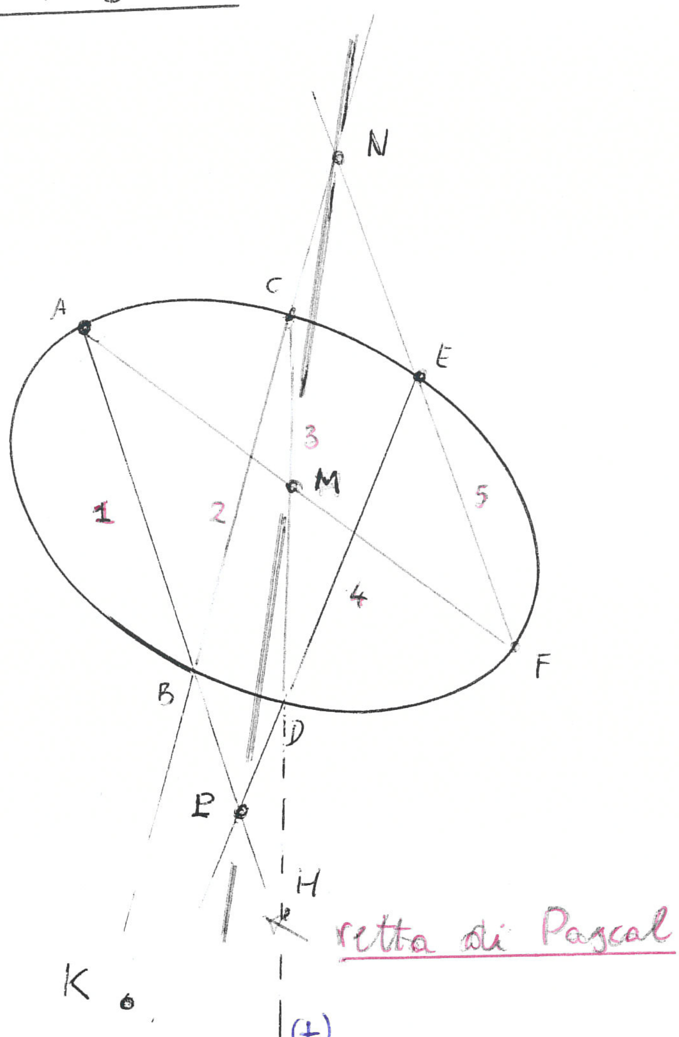
$$\mathcal{C}_2 = \{ P_2 \mid (P_2A, P_2B, P_2C, P_2E) = (A'B'C'E') \}$$

Allora $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \{ A, B, C, X \}$

In altre parole, il teorema di Steiner - Chasles consente di precisare il punto da cui è stata scattata la foto



☆☆☆ Teorema di Pascal



(+) È postulato in Enriques, ma non è necessario

In un esagono (semplice)(+) inscritto in una conica le intersezioni delle tre coppie di lati opposti [i.e 1-4, 2-5, 3-6] sono allineate; viceversa se in un esagono semplice si verifica quest'ultima proprietà, i suoi vertici stanno su una conica (che può spezzarsi in due rette: si ha allora il teorema di Pappo)

Dim (ci si riferisca alla figura) Da **A** ed **E** proiettiamo i punti rimanenti. CNES affinchè $A, B \dots F$ appartengano ad una conica è che

$A(CBDF) \barwedge E(CBDF)$ (teor. di ☆ Charles-Steiner)

fasci proiettivi

Seghiamo $A(CBDF)$ con CD
$E(CBDF)$ con CB

Si ha: $CHDM \;\bar{\wedge}\; CBKN$

i.e. le due punteggiate sono proiettive, anzi prospettive, poichè G è unito

omologhi

$\Rightarrow$ le congiungenti i punti omologhi: HB, DK, NW passano per uno stesso punto P, ovvero

$$P := \underset{1}{A}\underset{}{B} \cap \underset{4}{D}E \quad , \quad N = \underset{2}{B}C \cap \underset{5}{E}F \quad , \quad M = \underset{3}{C}D \cap \underset{6}{F}A$$

sono allineati, che è quanto si voleva. □

Duale: teorema di Brianchon

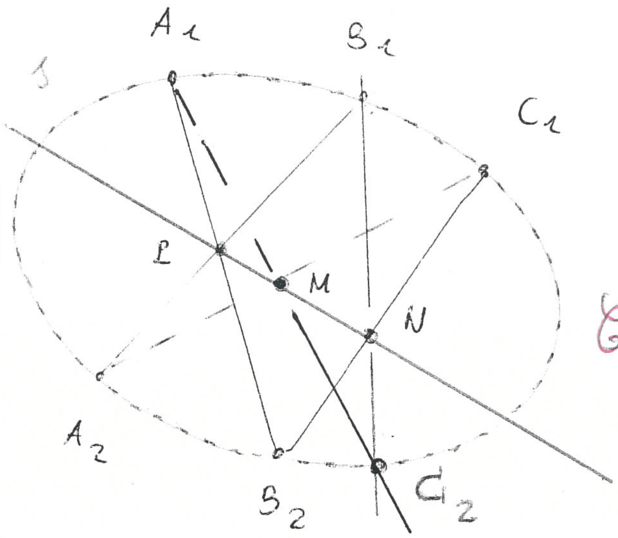
Se un esalatero semplice è circoscritto ad una conica, le tre congiungenti le tre coppie di vertici opposti passano per uno stesso punto (pto di Brianchon)

★ ★ Tracciamento della conica per cinque pti (generici) dati tramite il teorema di Pascal

[esagono]

$\underbrace{A_1 B_2}_{1}\underbrace{C_1}_{2}\underbrace{A_2}_{3}\underbrace{B_1}_{4}\underbrace{C_2}_{5}\underbrace{A_1}_{6}$

C_2 da determinare, data s per P



★ fissiamo s per

$P = A_1B_2 \cap B_1A_2$

① A_1B_2	④ A_2B_1 ⇝ P
② B_2C_1	⑤ B_1C_2 ⇝ N
③ A_2B_1	⑥ C_2A_1 ⇝ M

allineati ⟺ A_i, B_i, C_i sono su $\mathcal{C}$

- tracciamo A_2C_1 : sia $M = A_2C_1 \cap s$
- tracciamo A_1M : $(C_2 \in A_1M)$
- tracciamo B_2C_1 : sia $N = B_2C_1 \cap s$
- tracciamo B_1N : $(C_2 \in B_1N)$

$\Rightarrow C_2 = B_1N \cap A_1M$ ed è un nuovo pto di $\mathcal{C}$

☆ Variando s nel fascio di centro P otteniamo i vari pti della conica