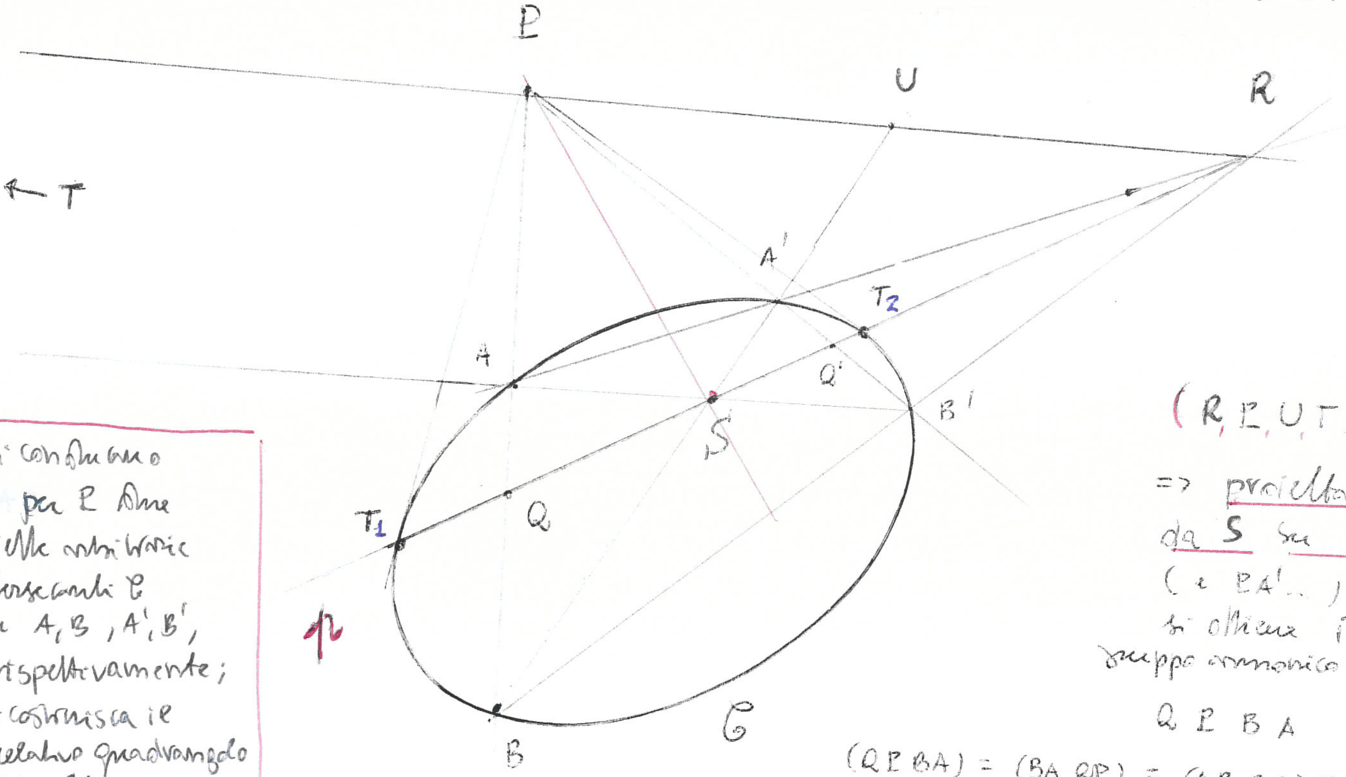
☆ Costruzione della polare di P (rispetto alla conica $\mathcal{C}$) e delle tangenti a $\mathcal{C}$ condotte da P

V2 — MATEMATICHE COMPLEMENTARI II

Lezione XXVII

Prof. M. Spera
UCSC Brescia



Si considerino per P due rette arbitrarie intersecanti $\mathcal{C}$ in A, B, A', B', rispettivamente; si costruisca il relativo quadrangolo completo

$(R, P, U, T) = -1$

$\Rightarrow$ proiettando da S su PA (e PA'..) si ottiene il gruppo armonico

Q P B A

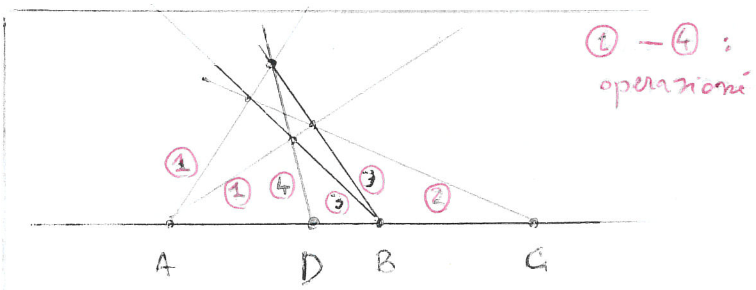
$(QPBA) = (BA\,QP) = (AB\,PQ) = -1$

Si ricordi che

La polare p è il luogo dei coniugati armonici di P rispetto alle intersezioni (ex A, B) di una retta per P con $\mathcal{C}$. Condotte le rette AB, A'B' passanti per P, e costruiti $R = AA' \cap BB'$ e $S = AB' \cap A'B$, è $p = RS$, e $Q = AB \cap p$, $Q' = A'B' \cap p$ sono coniugati armonici di P rispetto ad A, B, A', B', nell'ordine.

Infine, le tangenti cercate sono le PT_1 e PT_2

$(\{T_1, T_2\} = p \cap \mathcal{C})$

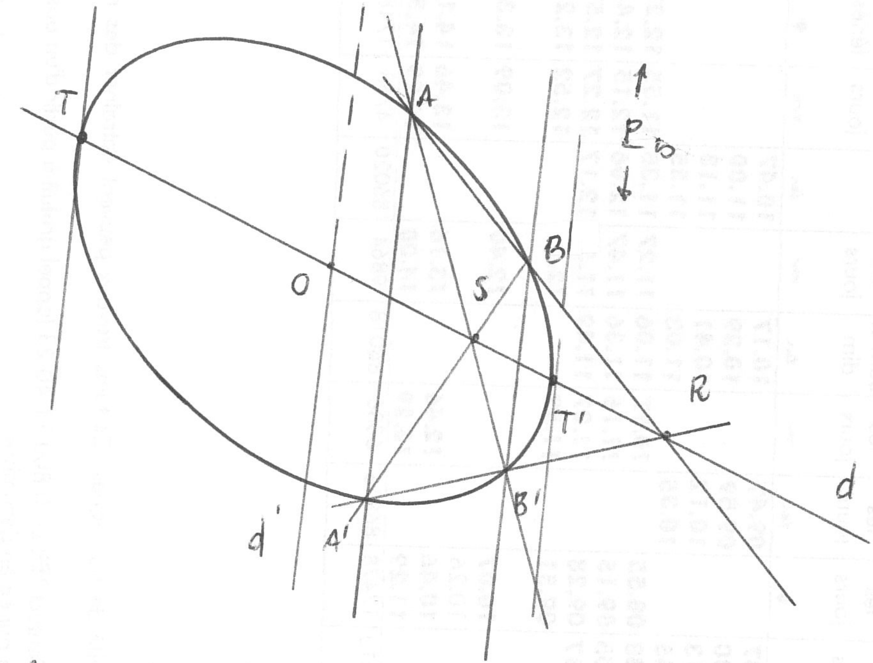


D: con. armonico di C rispetto ad A, B

Per simmetria si ha pure: R è il polo di PS, sicché si ha il teorema di reciprocità: $P \in q \iff Q \in p$.

Problema Data una conica a centro $\mathcal{C}$, trovarne il centro (per via grafica)

Sol: Si scelga una direzione P_∞, si traccino rette parallele AA', BB' intersecanti la conica, la retta SR è polare di P_∞, e dunque un diametro. Ripetuta la costruzione con un'altra direzione, oppure bisecando TT', si ottiene O



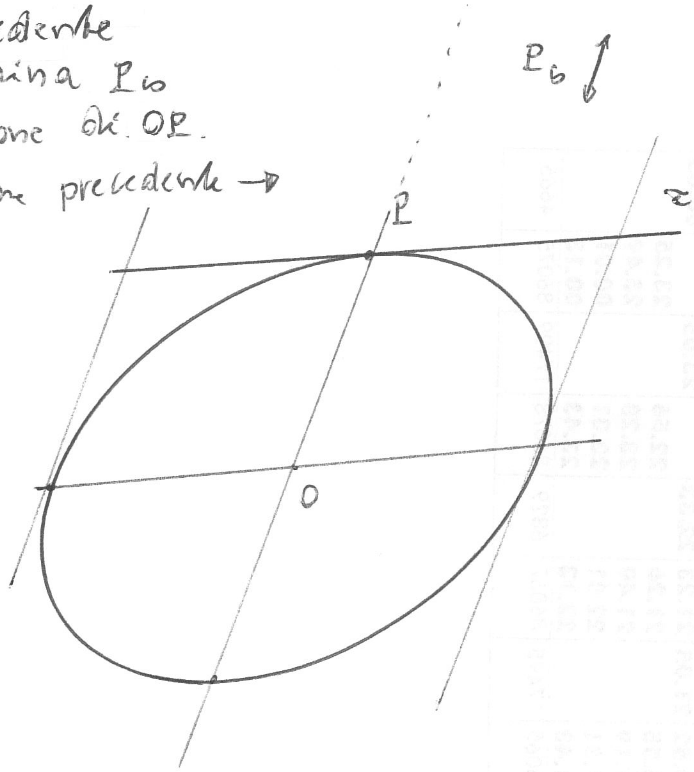
le parallele ad AA', BB' per T e T', risp. sono le tangenti a $\mathcal{C}$ in T e T'. La retta d', parallela ad AA', passante per O è il diametro d' coniugato a $d = RS$

Problema

Data $\mathcal{C}$ a centro e $P \in \mathcal{C}$, tracciare la tangente τ a $\mathcal{C}$ in P

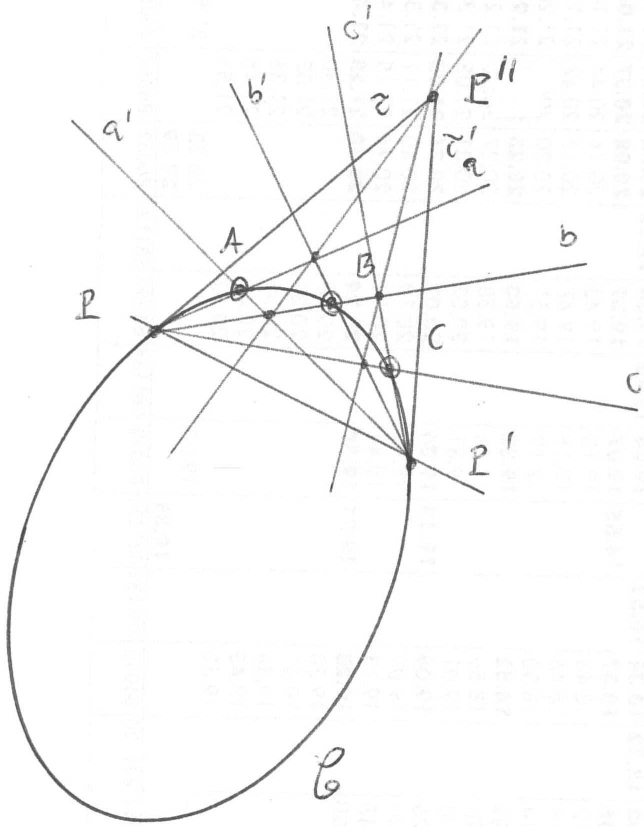
Sol. Trovato il centro con la costruzione precedente si determina P_∞ = direzione di OP.

La costruzione precedente → fornisce di fatto il diametro coniugato a OP: la parallela a questo per P fornisce la tangente cercata.



* Problema Data una conica $\mathcal{C}$, tracciare la tangente τ a $\mathcal{C}$ in P.

Altra soluzione: con Steiner - Chasles

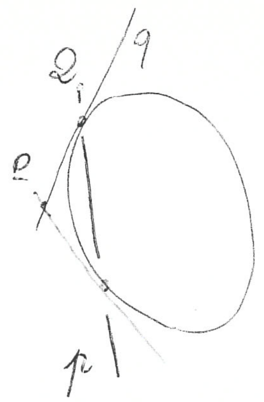


Sia P' un altro punto di $\mathcal{C}$; essendo i fasci di centri P e P' proiettivi, se ne determini il punto di Pappo P''. Le rette PP'' e $P'P''$ saranno allora tangenti a $\mathcal{C}$ in P e P'.
PP', corrispondente a τ e τ' nella proiettività, è la polare di P'' (rispetto a $\mathcal{C}$)

☆☆ Il teorema di reciprocità + variante

$P \in q \iff Q \in p$

per via sintetica

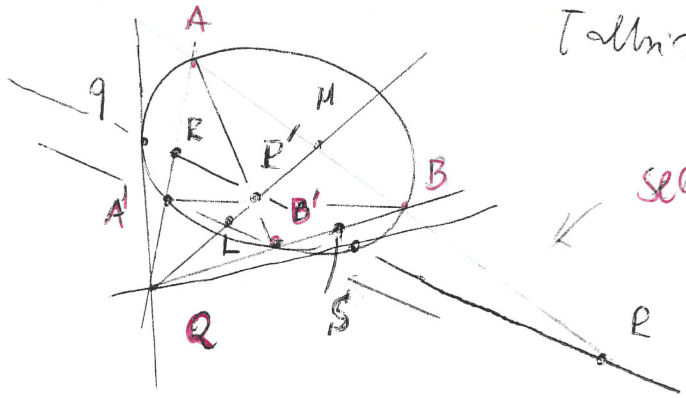


Se $Q \in \mathcal{C}$, q è tangente a $\mathcal{C}$ in Q

se $P \in q$, p chiaramente $\ni Q$ →

Sia allora Q "esterno", $P \in q$ ma $P \notin \mathcal{C}$

[altrimenti è chiaro]



secante da P

A, A', B, B' sono gli corrispondenti dell'involuzione[(+)] di asse q e polo Q $(\iota^2 = id)$

☆ ora M è quarto armonico dopo $A\,B\,P$

L = = $A'\,B'\,P$

se ciò è vero, ML è la polare di P

[luogo di quarti armonici]

Ora;

la quaterna $B'BQS$ è armonica;

la si proietti da P su $P'Q$:

si ottengono $LMQP'$.

Si proiettino questi ultimi da A' su PM:

si ha

$$(B'BQS) = (LMQP') = (PMAB)$$

$$(*) \qquad = (ABPM) \leftarrow \text{armonica}$$

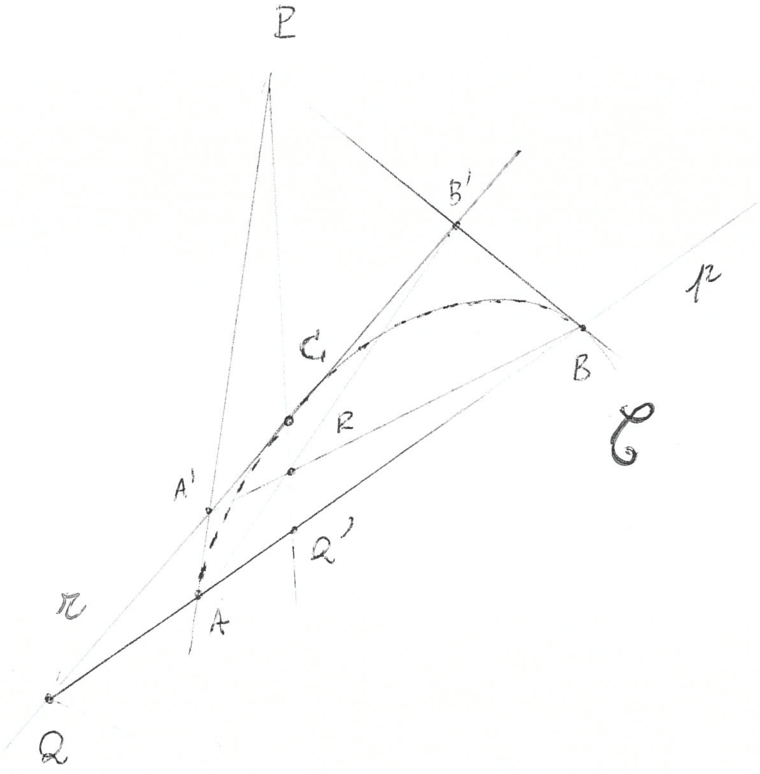
Analogamente, proiettando $AA'QR$ da P su LQ, ottenendo $MLQB'$, e questi ultimi da A su LP, si ha

$$(AA'QR) = (MLQP') = (PLA'B')$$

$$= (A'B'PL) \leftarrow \text{armonica}$$

e si conclude $\square$

Problema



*) Determinare, nel fascio delle **coniche bitangenti** ad AP, BP in A, B, il pto di contatto di quella **conica $\mathcal{C}$ tangente** ad r ("tangente di spalla" (shoulder tangent))
(=> la conica è costruibile)

Costruzione: AB è la polare di P rispetto alla conica cercata, e passa per $Q = AB \cap r$ => la polare q di Q contiene P. Individuato il quadrangolo ABB'A', la retta PR sega p in Q', che risulta essere coniugato armonico di Q rispetto ad A e B.

Pertanto $q = PR$. Sia $C = r \cap PR = r \cap q$

Poiché r è tangente a $\mathcal{C}$, $C \in \mathcal{C}$, ed è pertanto il pto cercato.