Lezione XXVIII

v2

MATEMATICHE COMPLEMENTARI II

Prof. Mauro SPERA
UCSC, Brescia

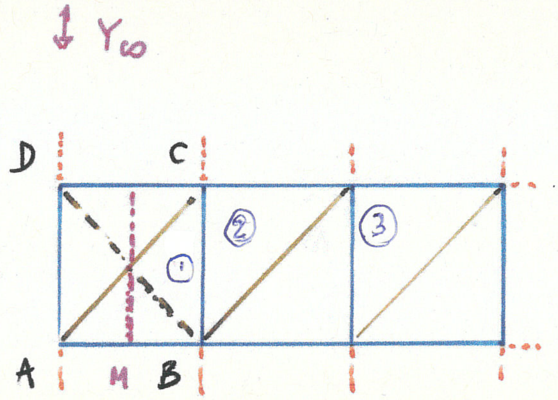
Def. Un'omografia (proiettività, collineazione) piana è una corrispondenza biunivoca del piano proiettivo su sé che manda rette in rette e conserva i birapporti

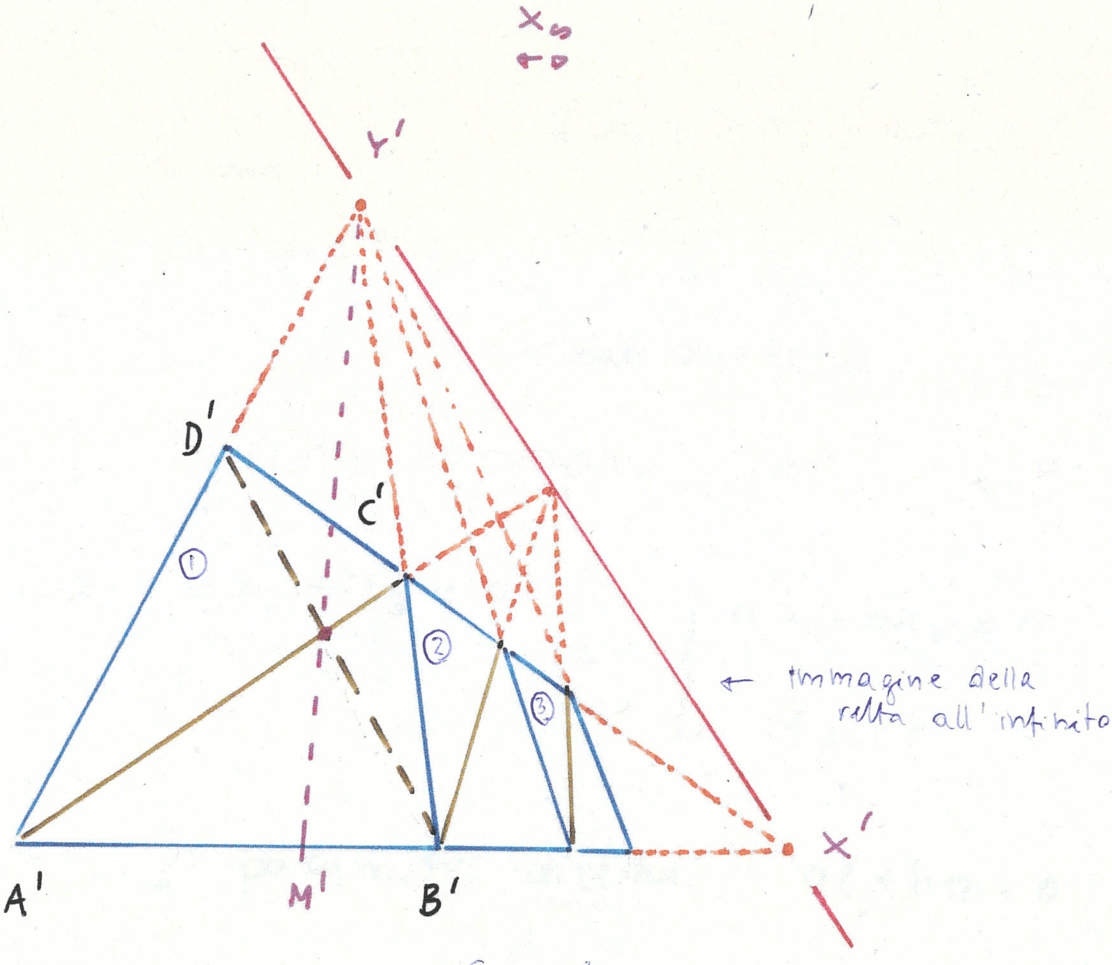
Sussiste il seguente teorema fondamentale della geometria proiettiva nel piano:

TF

Un'omografia piana è individuata fissando le immagini di quattro punti distinti e a tre a tre non allineati

Illustrazione del teorema fondamentale della geometria proiettiva nel piano





per mezzo di
bisezioni successive
+ continuità
si costruisce l'immagine
di un pto qualsiasi

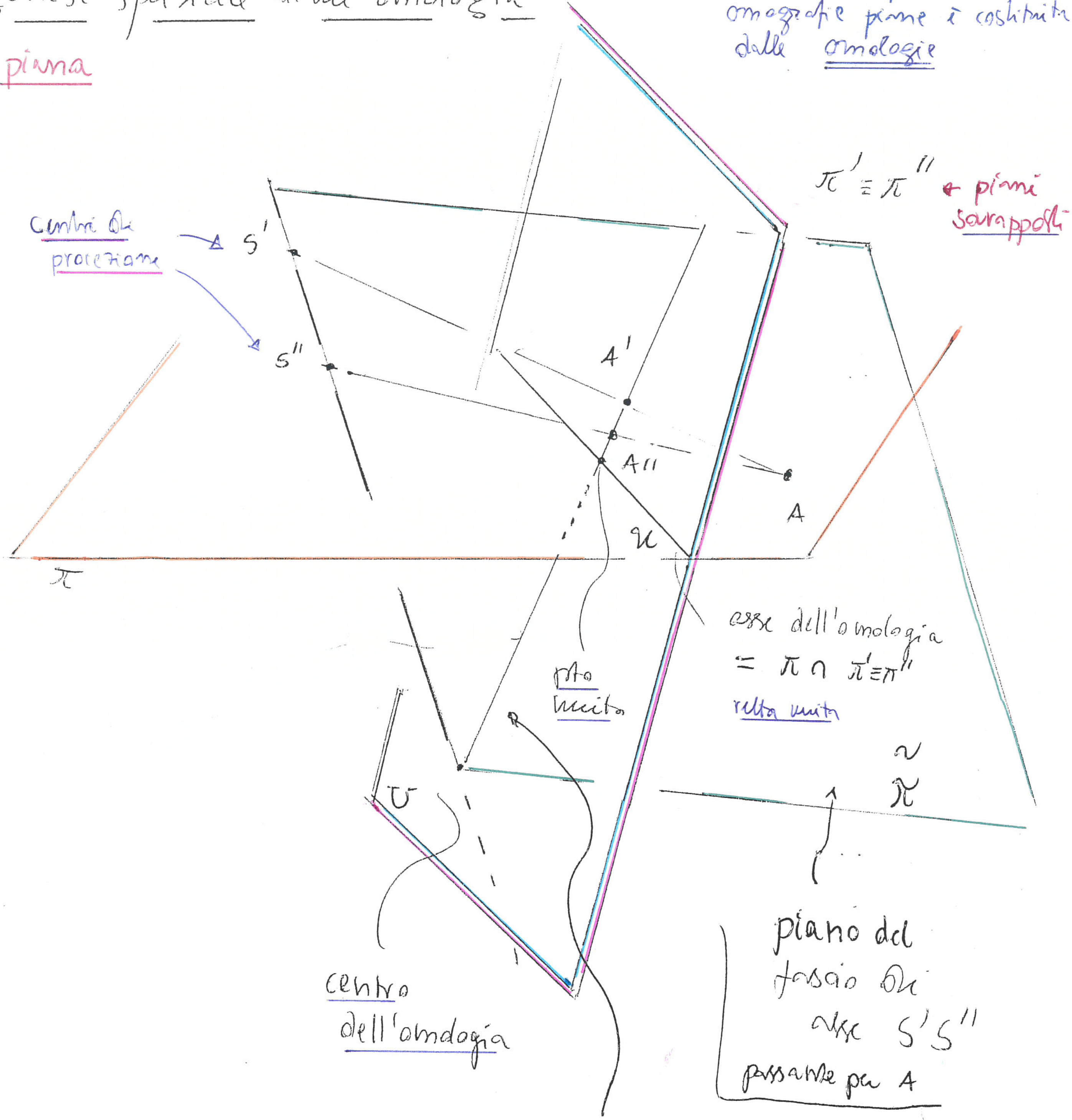
Si ricordi:

$(A\ B\ X_\infty\ M) =$

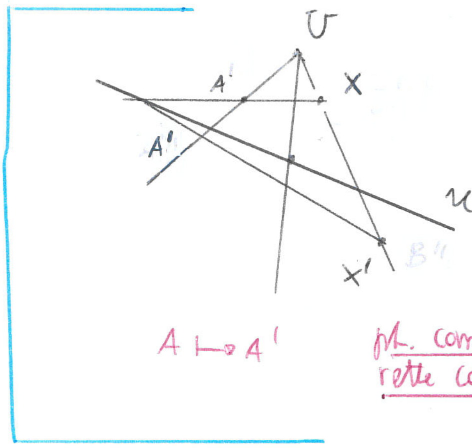
$(A'B'X'M') = -1$

* genesi spaziale di un'omologia piana

una classe speciale di omografie piane è costituita dalle omologie



* U, A', A'' sono allineati sulla retta $\pi' \cap \tilde{\pi}$ ≡ π''

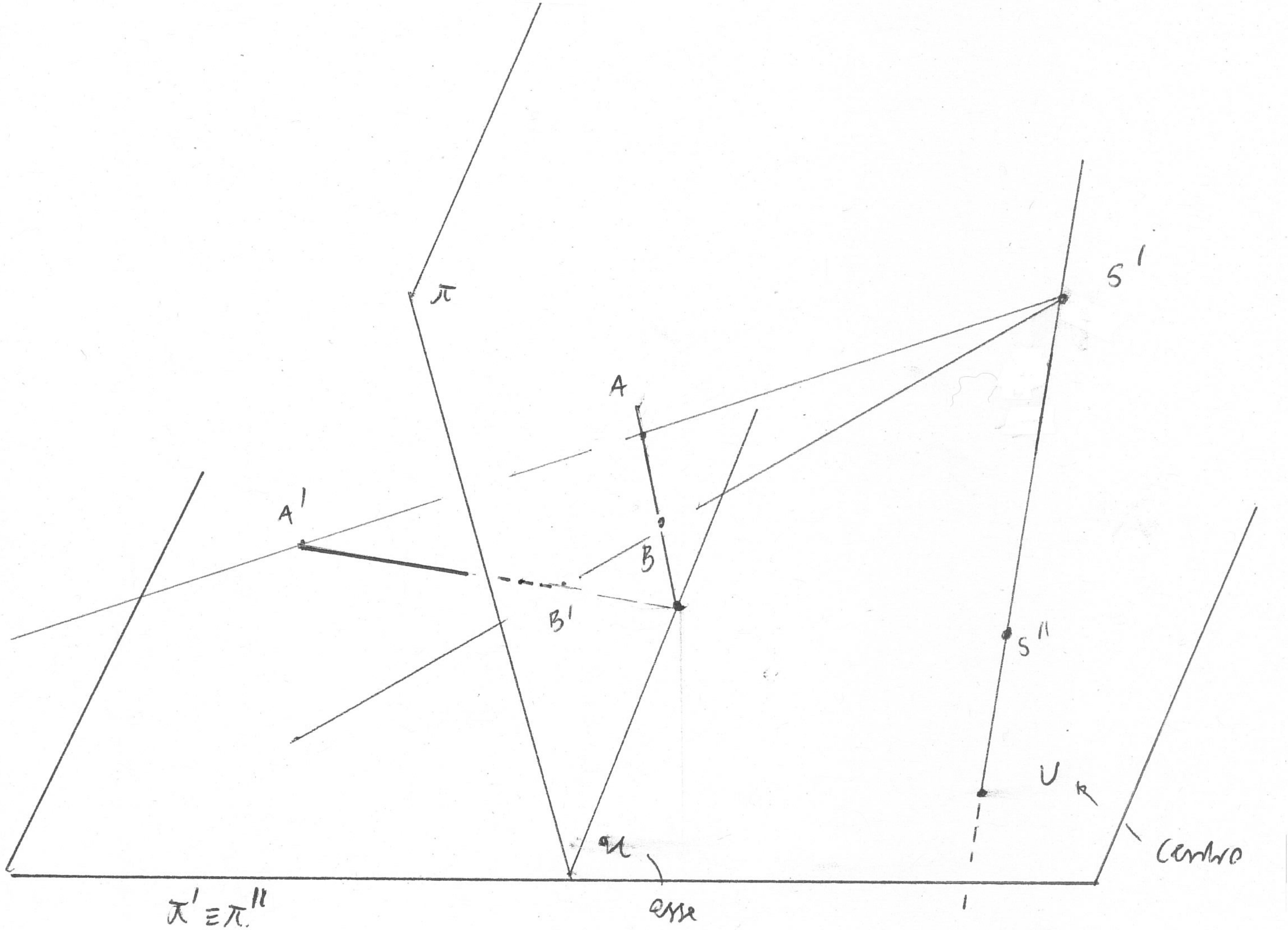


asse dell'omologia
retta di pti uniti

$A \mapsto A'$

pti corrispondenti allineati col centro U
rette corrispondenti si incontrano sull'asse u

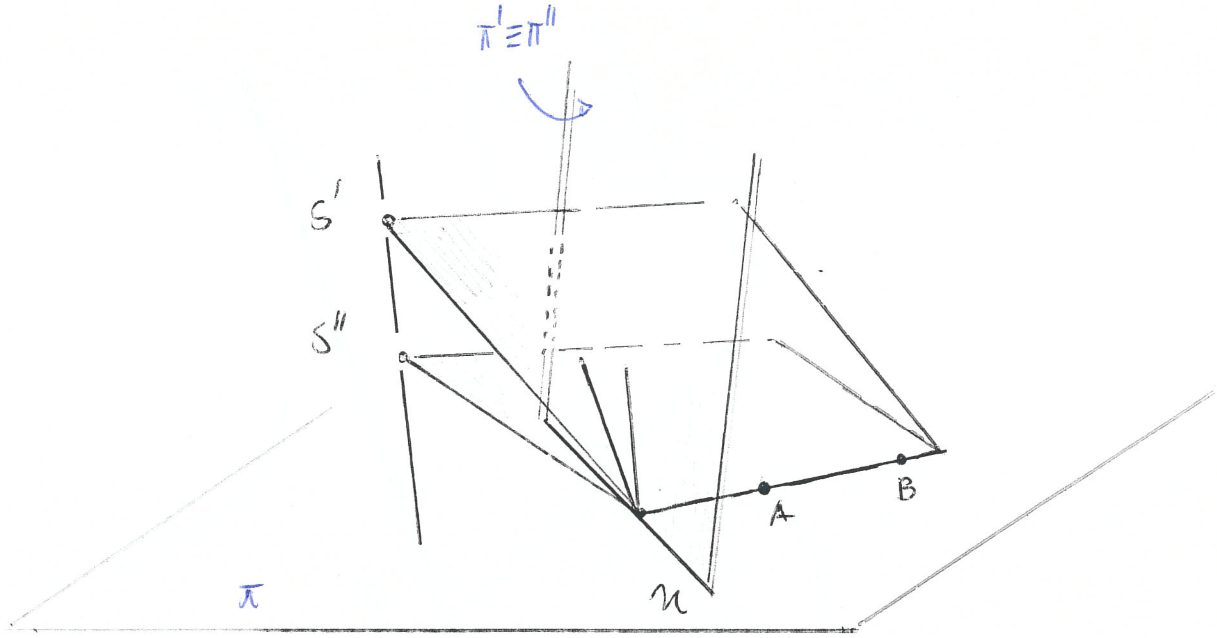
⤳ vedi anche pagina successiva

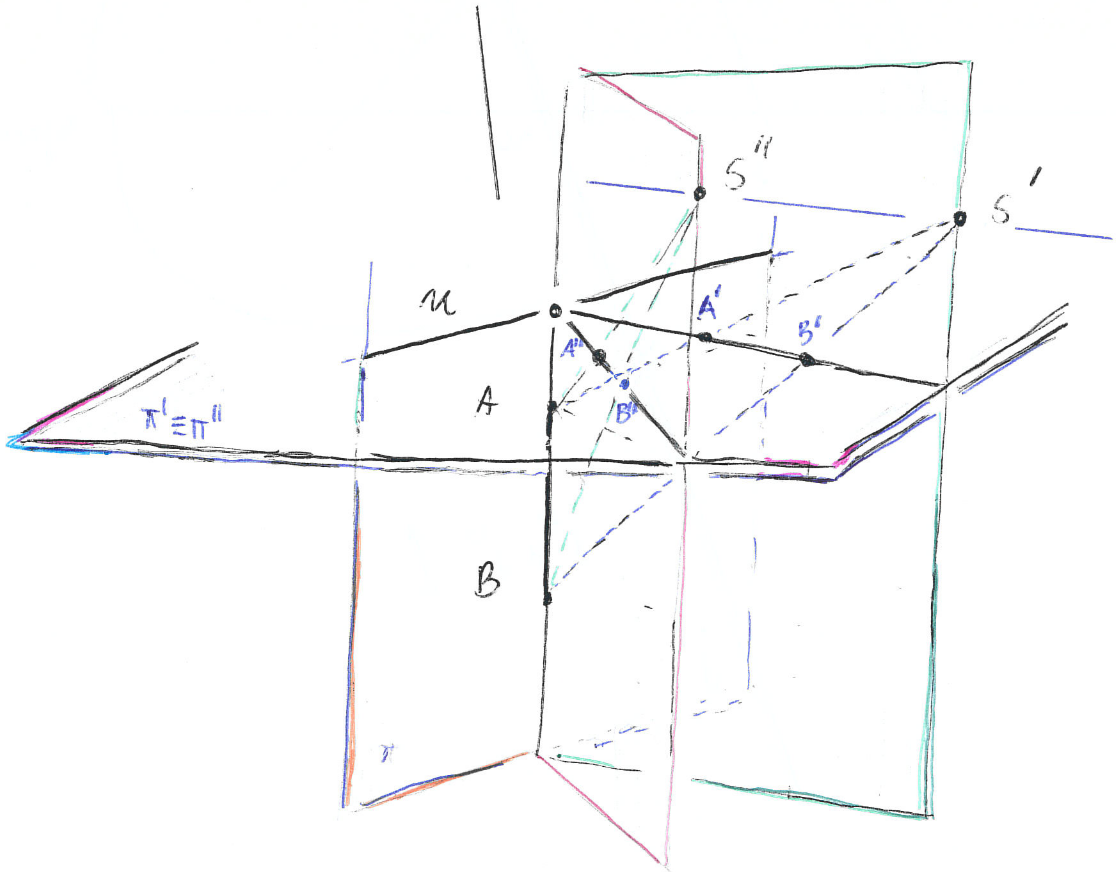


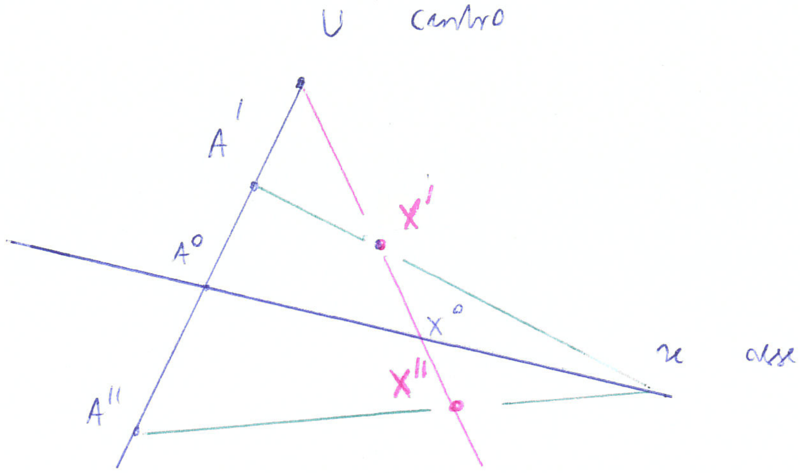
AB, A'B', A''B'' (non mostrato)
concorrono necessariamente in
uno stesso punto di u

A'A'', B'B'' concorrono in $\bar{U}$

Segue: ∀ in un'omologia
rette corrispondenti si incontrano sull'asse





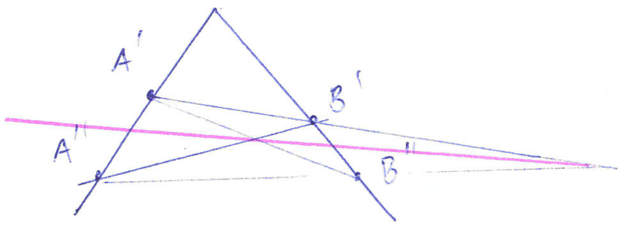


Un' omologia è individuata dal centro, asse e da una coppia di pti corrispondenti: in figura è mostrata la costruzione dell' immagine X'' di X'. Si noti altresì che

$$(A', A'', A^0, U) = (X', X'', X^0, U) \equiv \text{invariante dell'omologia} \quad ☆☆$$

☆ Un' omologia con invariante pari a -1 è detta armonica [(A', A'', A^0, U) ecc sono gruppi armonici]

Una tale omologia si ottiene fissando $\bar{U}$ e due coppie di pti corrispondenti



Tali omologie saranno cruciali per la costruzione del modello di Beltrami-Klein del piano iperbolico

Ancora Desargues

V

osserviamo che l'omografia φ individuata
piana
da

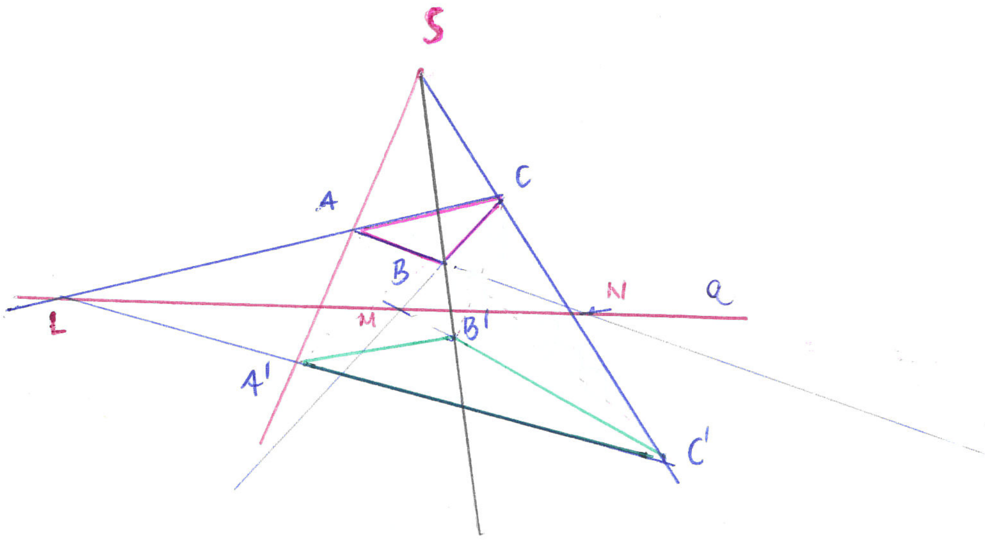
(v. figura) φ: $\begin{cases} A \longmapsto A' \\ B \longmapsto B' \\ C \longmapsto C' \\ L \longmapsto L \end{cases}$

si ricordi: un'omografia piana è individuata dall'immagine di quattro pti distinti a tre a tre non allineati
TF.. geom. proiettiva nel piano

è un'omologia di centro S, asse a

luogo di punti fissi. In particolare, sono fissi

L, M, N, e dunque si trovano sull'asse a.
$\parallel$ $\parallel$ $\parallel$
$AC \cap A'C'$ $BC \cap B'C'$ $AB \cap A'B'$



È spiegata pertanto l'origine della locuzione triangoli omologici ("in prospettiva")