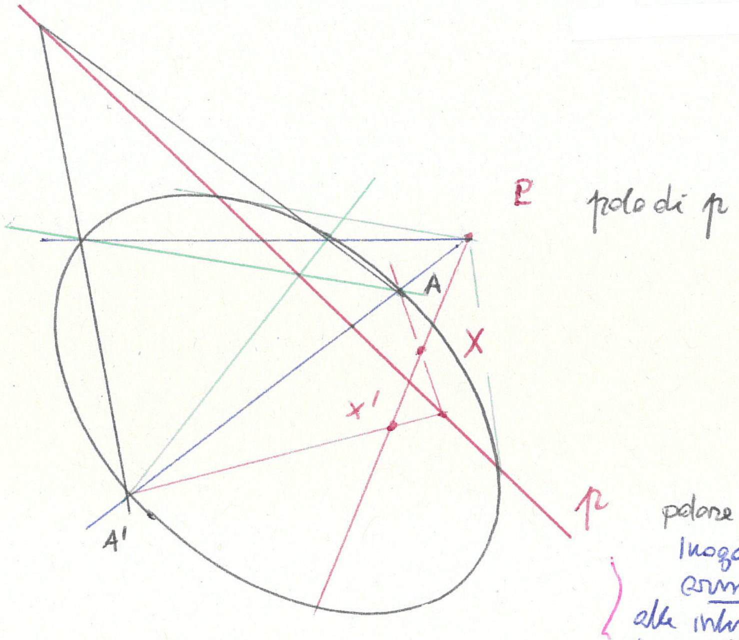
MATEMATICHE COMPLEMENTARI II

Prof. Mauro Spera UCSC Brescia

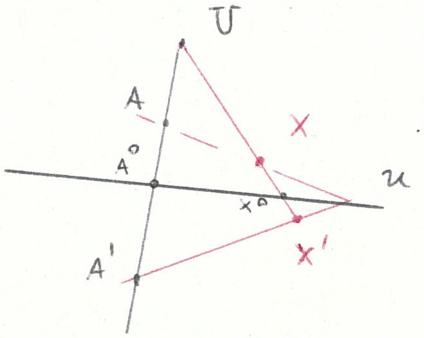
Lezione XXX

Le omografie che lasciano fissa una conica $\mathcal{C}$ (e mandano pti interni in pti interni) si realizzano come prodotti di omologie armoniche:



polare di P
luogo dei coniugati armonici di P rispetto alle intersezioni di $\mathcal{C}$ e di una retta per P

Si ricordi:
un'omologia è fissata qualora siano dati il centro U, l'asse u e una coppia di pti corrispondenti

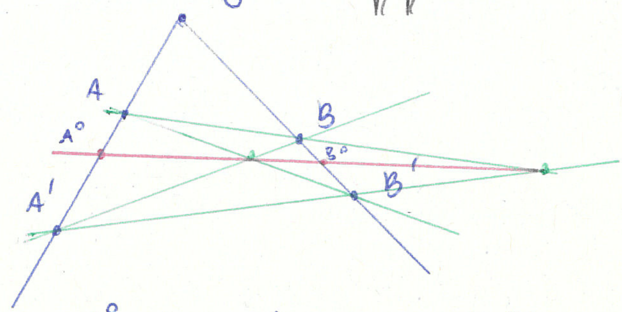


notare altresì che

$$(A, A', A^\circ, U) = (X, X', X^\circ, U)$$

$\Rightarrow$ ha senso definire l'invariante dell'omologia data come birapporto associato ad una quaterna del tipo testé discusso

Per fissare un'omologia armonica basta fissare U e due coppie di pti corrispondenti (la condizione di armonicità individua l'asse)



A°: coniugato armonico di U rispetto ad A', A ecc.

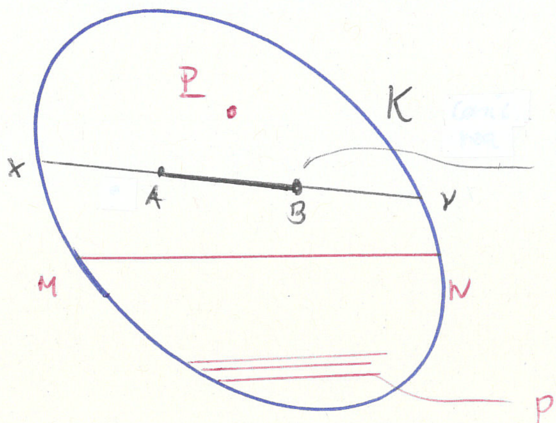
invariante dell'omologia $= -1$

vedi

OSSERVAZIONE importante: un'omologia armonica induce un'involuzione su ogni retta per il centro

☆☆☆ Modello di Klein (Beltrami-Klein)

K: conica a pti reali



P : punto

MN : retta

segmento

$k>0$ o simili

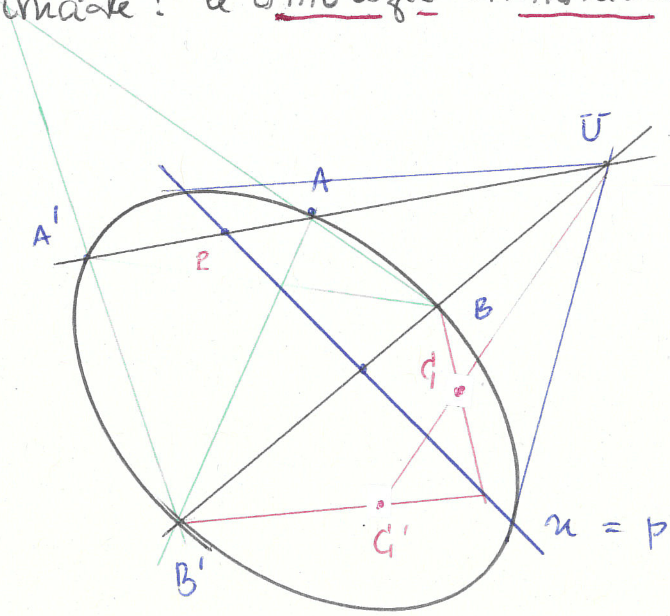
$\overline{AB} := k \log (A,B,X,Y)$

vale la disuguaglianza triangolare (v. oltre)

piano (di Klein)

Movimenti rigidi : omografie che mutino K in sé (e pti interni in pti interni.

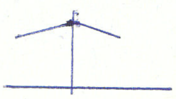
Esempio cruciale: le omologie armoniche

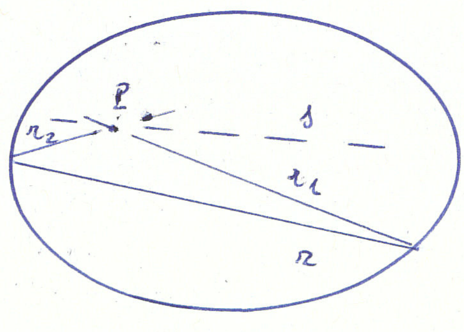


$(A' A\ U\ P) = -1$ ecc.

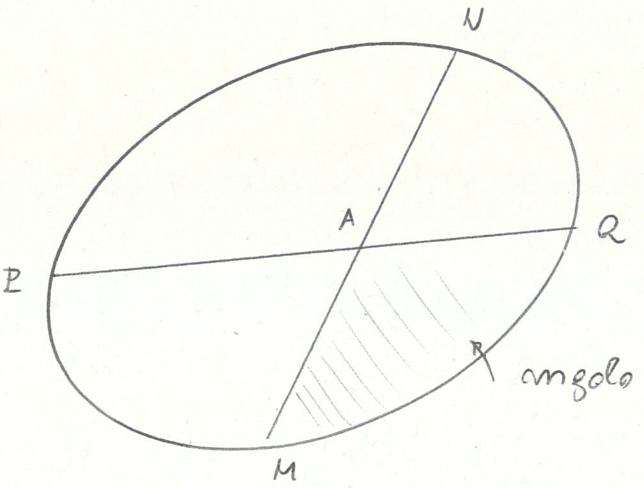
r e r_1 parallele ad r

r e s ultraparallele





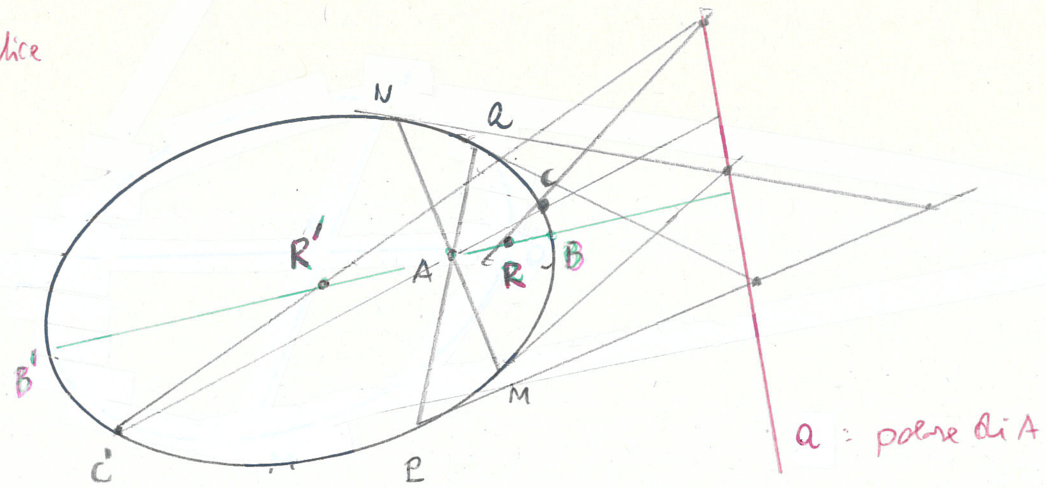
∡ angoli

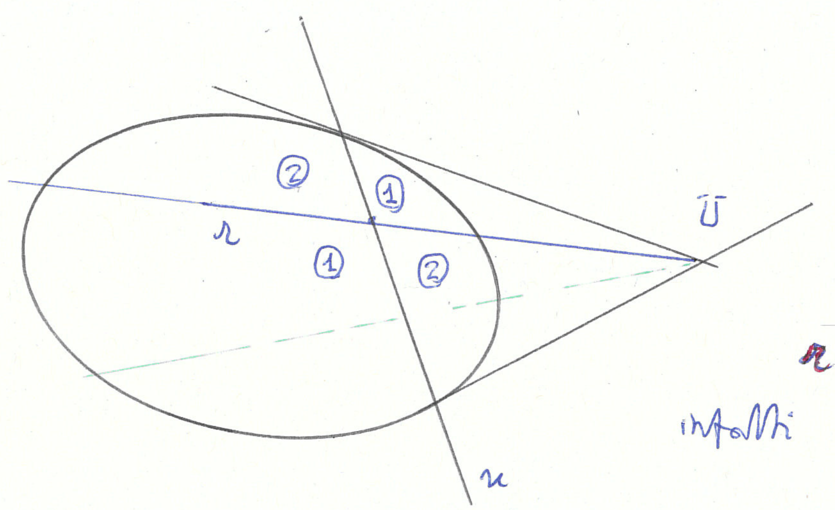


angolo $M\hat{A}Q$ (per definizione)

Si ha $\boxed{P\hat{A}N = M\hat{A}Q}$: l'omologia armonica di centro A e asse a (polare di A) fa corrispondere $R \leftrightarrow R'$

[angoli opposti al vertice sono uguali)



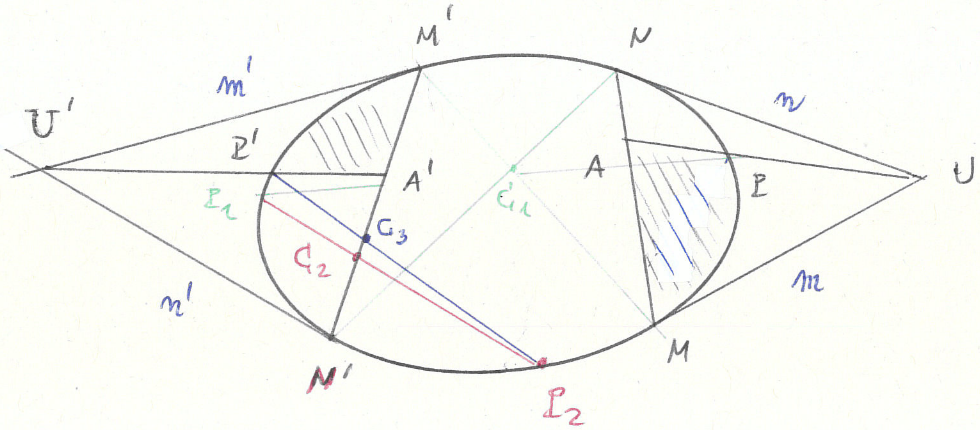


$r \perp u$

infatti 1 = 2

4 Verifichiamo il <u>IV postulato di Euclide</u>

Portiamo l'angolo retto $M\hat{A}P$ in $M'\hat{A'}P'$ tramite un movimento, eseguendo tre omologie armoniche



O_1	O_2	O_3
$M \mapsto M'$	$M' \mapsto N'$	$N' \mapsto M'$
$N \mapsto N'$	$N' \mapsto M'$	$M' \mapsto N'$
$P \mapsto P_1$	$P_1 \mapsto P_2$ arbitrario	$P_2 \mapsto P'$
omologia armonica di centro $C_1 = MM' \cap NN'$ e asse $= PC_1$	omologia armonica di centro $C_2 = P_1P_2 \cap M'N'$	omologia armonica di centro $C = M'N' \cap P_2P'$

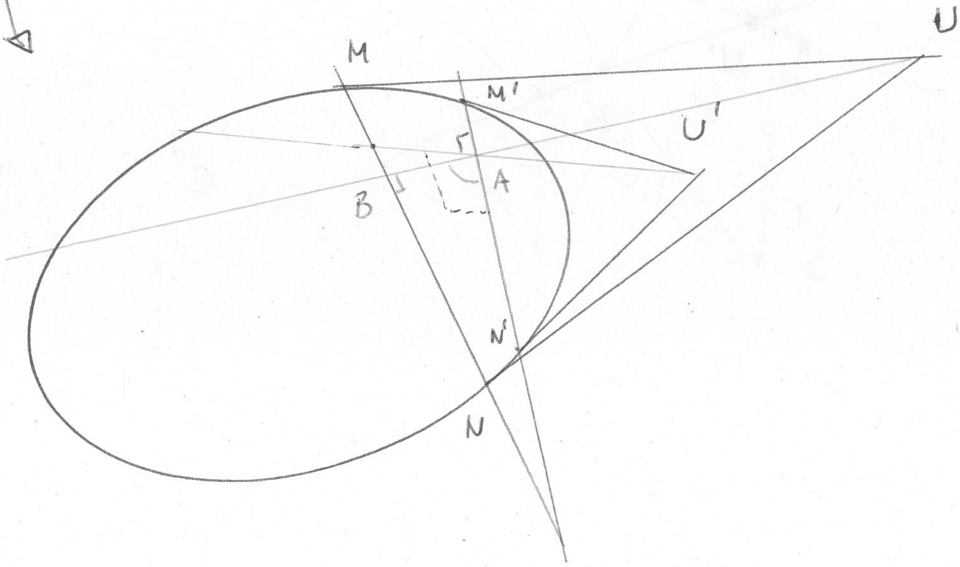
$O = O_3 \cdot O_2 \cdot O_1$ è il movimento richiesto (che risulta unico, nonostante P_2 sia arbitrario)

pti interni vanno in pti interni

☆ Verifichiamo direttamente che non vale il V postulato nella forma di Euclide (con Playfair sarebbe banale)

$\hat{A} + \hat{B} < 2$ retti , ma MN e M'N' non si incontrano

$\hat{B} =$ retto

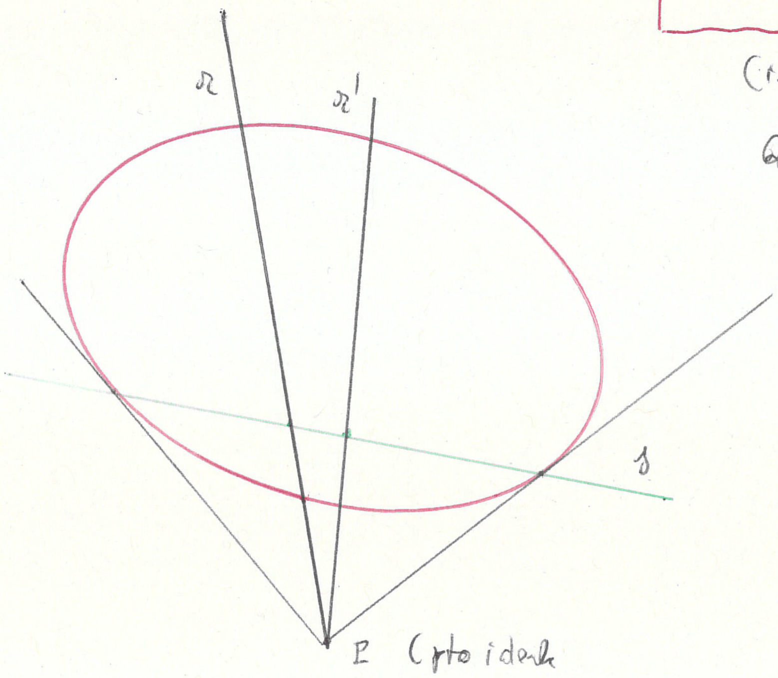


Alcune proprietà della geometria iperbolica

$\exists!$ perpendicolare comune a due rette ultraparallele

(i.e. non incidenti, né parallele)

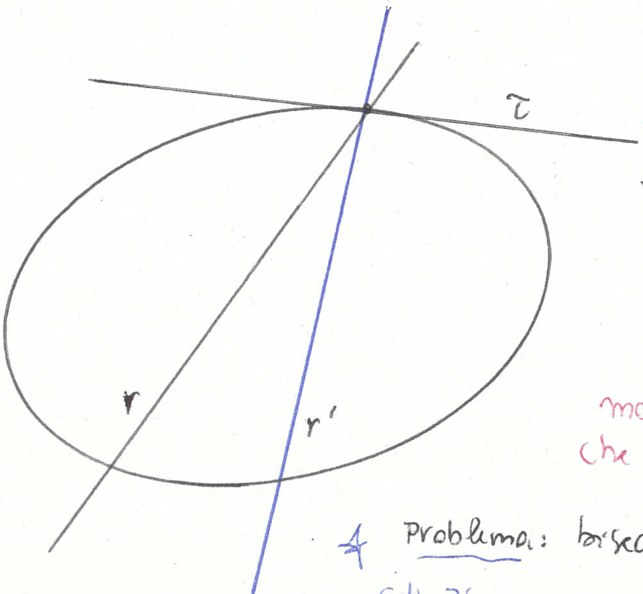
Qui è s



Il dilemma di Saccheri

r e r' parallele, con una perpendicolare comune, τ, ideale, all'infinito

"... e ciò ripugna alla natura della linea retta"
G. Saccheri

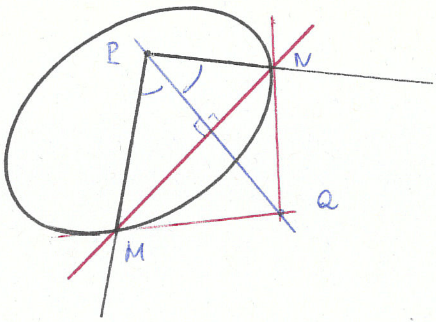


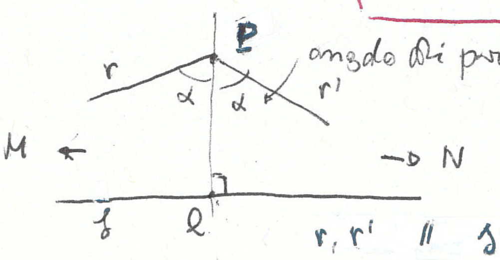
ma ciò è precisamente quello che accade nella geometria iperbolica!

Problema: bisecare un angolo ($M\hat{P}N$ in figura)

Soluzione:

sia Q il polo di MN
la retta PQ biseca l'angolo
($PQ \perp MN$)



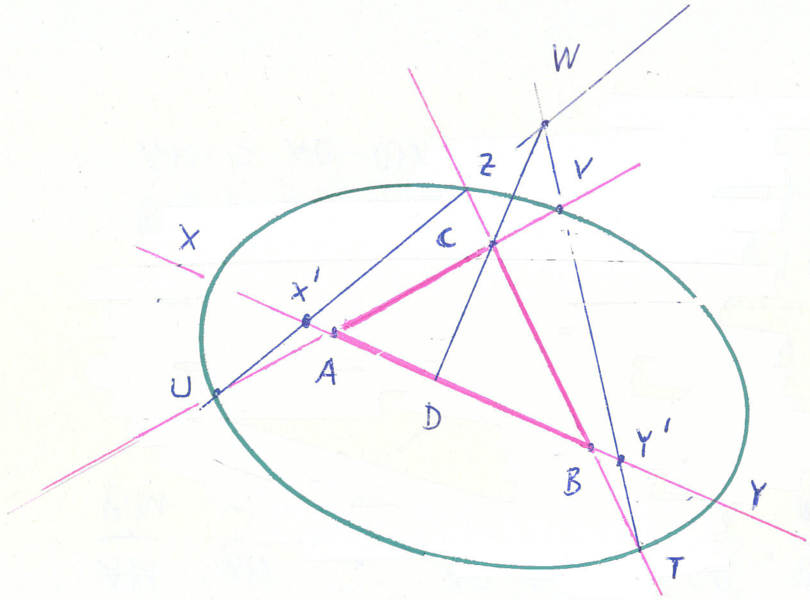


angolo di parallelismo

nel modello di Klein

☆ Dimostrazione diretta della disuguaglianza triangolare per la metrica iperbolica (di D. Hilbert)

[seguirebbe dagli assiomi della geometria "assoluta": in Euclide non si fa uso del postulato delle parallele]



$$\overline{AB} = \log(YX\;AB) = \log\left(\frac{YA}{XA} : \frac{YB}{XB}\right) =$$

$$= \log\left(\frac{YA}{XA}\cdot\frac{XB}{YB}\right) = \log\left(\underset{\substack{\vee\\1}}{\frac{YA}{YB}}\cdot\underset{\substack{\vee\\1}}{\frac{XB}{XA}}\right) \qquad (\Rightarrow \overline{AB} \geq 0)$$

ora $\quad \dfrac{YA}{YB}\cdot\dfrac{XB}{XA} \leq \dfrac{YA}{YB}\cdot\dfrac{X'B}{X'A} \leq \dfrac{Y'A}{Y'B}\cdot\dfrac{X'B}{X'A}$

infatti $\quad \dfrac{X'B}{X'A} = \dfrac{X'A + AB}{X'A} = 1 + \dfrac{AB}{X'A} \geq 1 + \dfrac{AB}{XA} = \dfrac{XA + AB}{XA} = \dfrac{XB}{XA}$

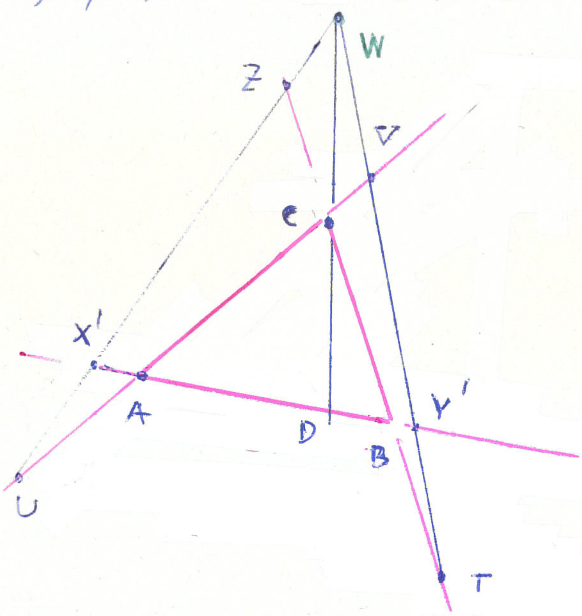
e similmente per l'altro quoziente.

Dimostriamo allora che $\frac{Y'A}{Y'B} \cdot \frac{X'B}{X'A} = \frac{Y'A}{X'A} : \frac{Y'B}{X'B} = (Y'X'AB)$

$= (VUAC)\cdot(ZTBC)$. Passando ai logaritmi,

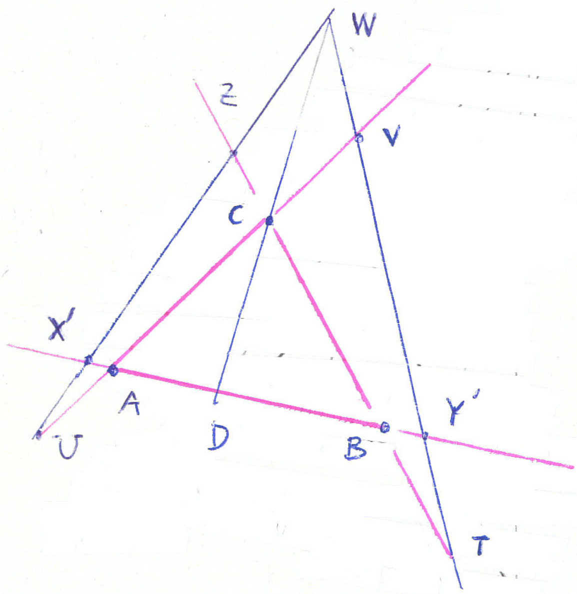
si conclude.

Le quaterne X', A, D, Y' e $U A C V$ sono prospettive da $\overline{W}$



$$\left\{ \begin{array}{l} X' \leftrightarrow U \\ A \leftrightarrow A \\ D \leftrightarrow C \\ Y' \leftrightarrow V \end{array} \right\}$$

e così Y', B, D, X', T, B, C, Z, prospettive da $\overline{W}$



$$\left\{ \begin{array}{l} Y' \leftrightarrow T \\ B \leftrightarrow B \\ D \leftrightarrow C \\ X' \leftrightarrow Z \end{array} \right\}$$

Si ha (invarianza del birapporto)

$$\frac{Y'A}{Y'D} \cdot \frac{X'D}{X'A} = \frac{VA}{VC} \; \frac{UC}{UA}$$

$$\frac{X'B}{X'D} \cdot \frac{Y'D}{Y'B} = \frac{ZB}{ZC} \; \frac{TC}{TB} \quad \text{e}$$

moltiplicando membro a membro, si ottiene

$$\frac{Y'A}{Y'B} \; \frac{X'B}{X'A} = \left(\frac{VA}{VC} \cdot \frac{UC}{UA}\right) \cdot \left(\frac{ZB}{ZC} \cdot \frac{TC}{TB}\right)$$, che è quanto volevamo