★ Sul recupero delle proprietà metriche in geometria proiettiva

(premessa alla formula di Bolyai-Lobachevskij

V2

MATEMATICHE COMPLEMENTARI II

Prof. M. Spera - UCSC Brescia

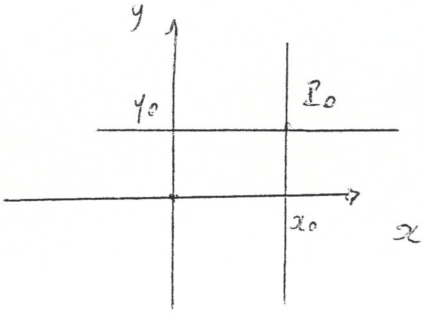
★ Piano proiettivo

Lezione XXXI

Punti ciclici : $[0, 1, \pm i] \equiv C_{\pm}^{\infty}$

direzioni delle rette isotrope : $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = 0$

$$\left(\Rightarrow \quad y - y_0 = \pm i \, (x - x_0) \right)$$



una conica $\mathcal{C}$ passa per i pti ciclici $\Leftrightarrow$ è una circonferenza

Sia $(x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2 = R^2$ la circonferenza

di centro $\bar{P} : (\bar{x}, \bar{y})$ e raggio R (≥ 0)

Si trova

$$x^2 + y^2 - 2\bar{x}\,x - 2\bar{y}\,y + \bar{x}^2 + \bar{y}^2 - R^2 = 0$$

$$\equiv \quad x^2 + y^2 + a x + b y + c = 0$$

con $a = -2\bar{x}$ $\quad c = \bar{x}^2 + \bar{y}^2 - R^2$

$b = -2\bar{y}$

$$\Rightarrow \quad R^2 = \bar{x}^2 + \bar{y}^2 - c$$

(≥ 0 se la deve essere reale)

Passiamo in coordinate omogenee $\left(x = \frac{x_1}{x_0} \quad y = \frac{x_2}{x_0}, \; x_0 \neq 0 \quad \text{ecc} \right)$

Si giunge subito a

$$c\, x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + a\, x_0 x_1 + b\, x_0 x_2 = 0 .$$

Pertanto, $\mathcal{C}$ rappresenta una circonferenza (non nec. a punti reali)

$\updownarrow$

(a_{ij})

$$\iff \qquad a_{11} = a_{22} \qquad \text{e} \qquad a_{12} = a_{21} = 0$$

Intersecandola con la retta impropria ($x_0 = 0$) troviamo subito

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad C_\pm^\infty : [0, 1, \pm i]$$

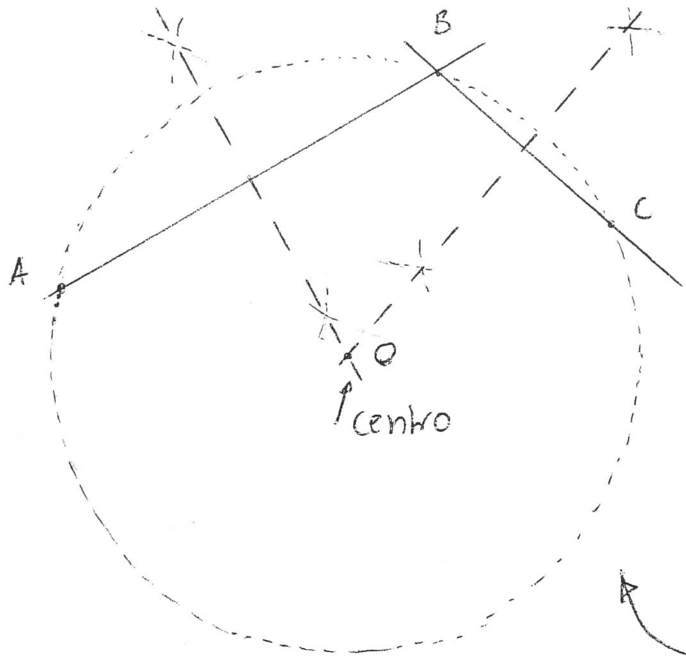
Viceversa, se nell'equazione generale imponiamo il passaggio per $C_\pm^\infty$, otteniamo

$$C_+^\infty : \quad a_{11} \cdot 1 + 2 a_{12} \cdot i + a_{22} \overbrace{(i^2)}^{=-1} = 0$$

$$C_-^\infty : \quad a_{11} \cdot 1 - 2 a_{12}\, i + a_{22} \underbrace{(-i)^2}_{-1} = 0$$

$$\Rightarrow \quad a_{12} \; (= a_{21}) = 0 \qquad \text{e} \qquad a_{11} = a_{22} \qquad \text{Q.E.D.}$$

Da ciò resta spiegato il fatto che per individuare una circonferenza nel piano occorra e basti assegnarne il passaggio per <u>tre</u> punti non allineati



Costruzione classica della circonferenza passante per tre p.ti dati, non allineati

Consideriamo ora la circonferenza

(reale, i.e. l'equazione ha coefficienti reali, ma senza pti reali !)

$$\Omega_\infty \qquad x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$$

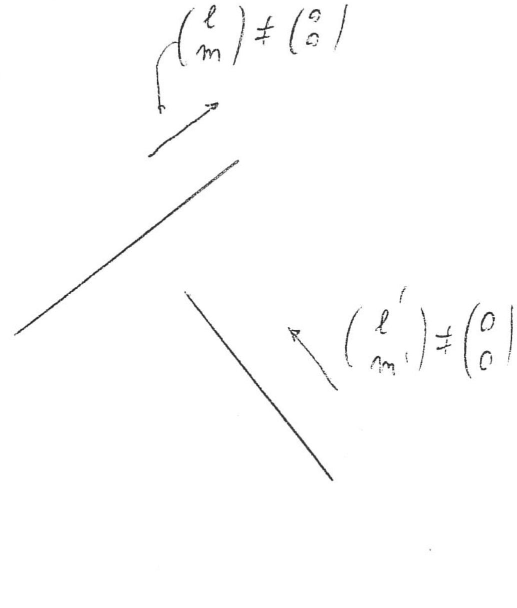
$$\Rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(matrice identità)}$$

Due direzioni $[0, l, m]$, $[0, l', m']$ sono coniugate rispetto a Ω_∞ $\Leftrightarrow$ sono ortogonali

$$(0 \quad l \quad m) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ l' \\ m' \end{pmatrix} = 0$$

parametri direttori

$$\Leftrightarrow \qquad l l' + m m' = 0$$



Ω_∞ interseca r_∞ nei pti ciclici.

Possiamo riformulare le considerazioni precedenti così:

$$(l \quad m)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l' \\ m' \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad l l' + m m' = 0$$

<u>su π_∞</u> (coor. omogenee x_1, x_2)

il complesso dei pti ciclici può essere espresso da $x_1^2 + x_2^2 = 0$

"conica assoluto" $\boxed{!}$ su una retta, una "conica" è una coppia di punti

$\Downarrow$

Dunque, l'ortogonalità è la polarità rispetto ad una particolare "conica", l'assoluto.

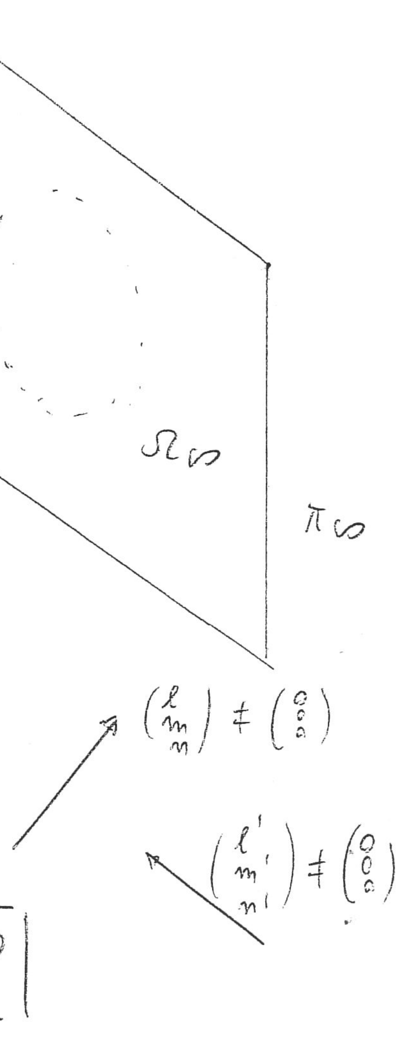
Tali considerazioni si generalizzano subito allo spazio:

Consideriamo $\pi_\infty : x_0 = 0$ piano improprio

Esso può essere descritto dalle coord. omogenee x_1, x_2, x_3. Consideriamo, su questo

$$\Omega_\infty : \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$$

Cerchio (o conica) assoluto



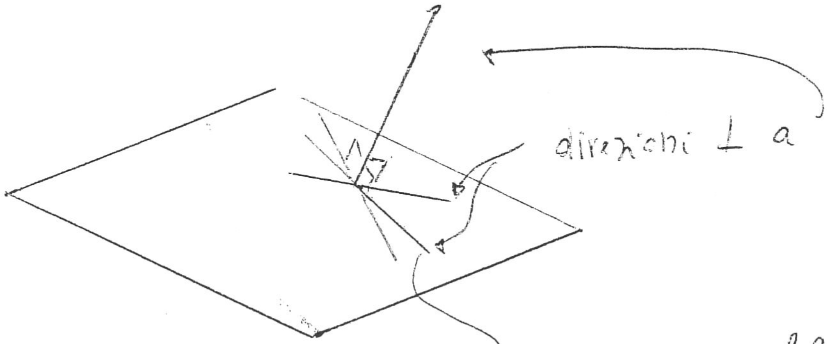
Consideriamo due direzioni spaziali $[0, l, m, n]$
$[0, l', m', n']$

$(l, m, n) \neq (0,0,0)$
$(l', m', n') \neq (0,0,0)$
(def a meno di $\rho \neq 0$)

☆ Nel piano π_∞ vengono individuati

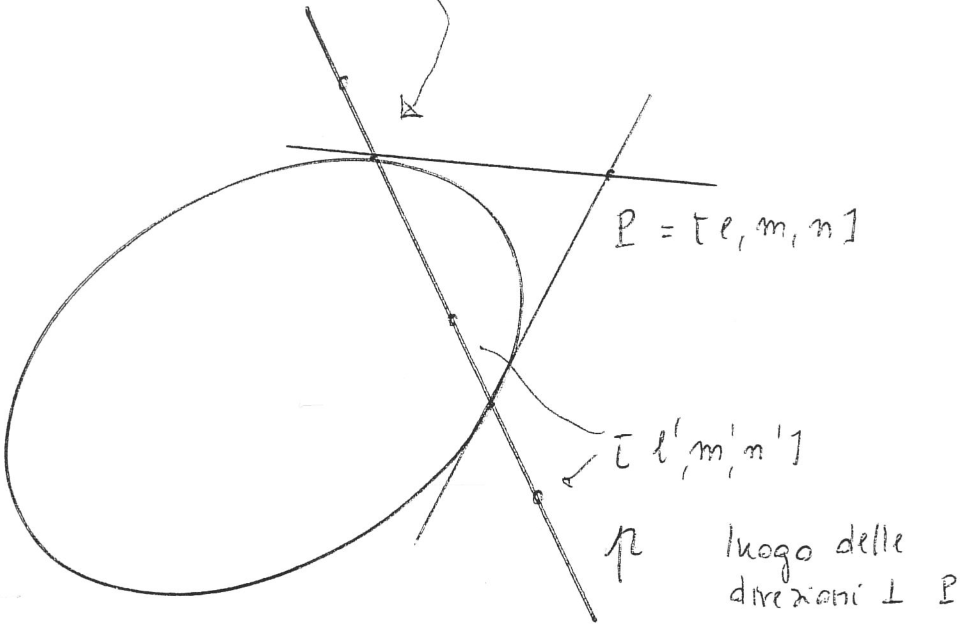
$X_1^\infty : [l, m, n]$ $\quad X_2^\infty : [l' \, m' \, n']$

allora, le direzioni date sono $\perp$ $\iff$ $\boxed{X_1^\infty \, \Omega_\infty \, X_2 = 0}$



$ll' + mm' + nn' = 0$

in π_∞

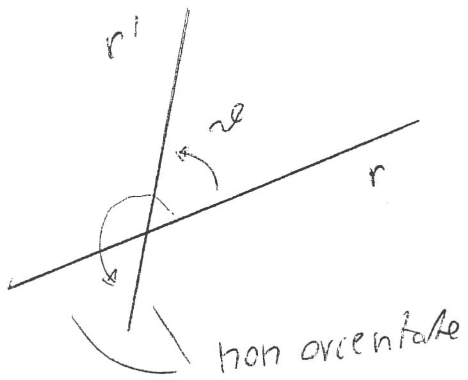


Ω_∞

assoluto (in π_∞ : $x_0 = 0$)

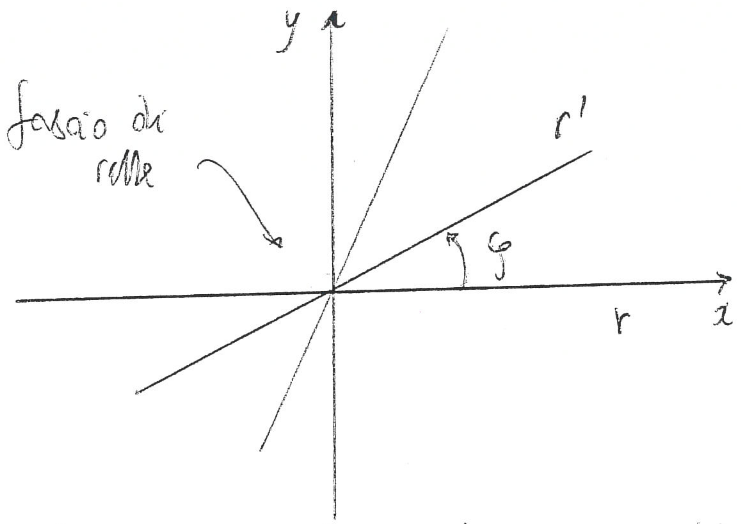
☆☆ La formula di Laguerre (1851)

Si operi nel piano euclideo, orientato e complessificato



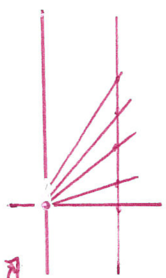
rr' angolo orientato

ϑ: def a meno di multipli interi di π



$$y = \overbrace{\tan\varphi}^{m}\, x$$

"coordinata tangente"



$j\,,\ \bar{j}$ rette isotrope $y = \pm i x$

birapporto: $\rightarrow$ $(\xi_1, \xi_2\, \xi_3\, \xi_4) := \dfrac{\xi_1 - \xi_3}{\xi_1 - \xi_4} \cdot \dfrac{\xi_2 - \xi_4}{\xi_2 - \xi_3}$

↳ di quattro rette nei "coord. tangente" $\quad m_1 \quad m_2 \quad m_3 \quad m_4$

$$\frac{m_1 - m_3}{m_1 - m_4} \cdot \frac{m_2 - m_4}{m_2 - m_3}$$

Calcoliamo: $(r, r', j, \bar{j}) =$

$$= (0, \tan\varphi, +i, -i) =$$

$$\frac{0 - (+i)}{0 - (-i)} \cdot \frac{\tan\varphi - (-i)}{\tan\varphi - (+i)} = - \frac{\tan\varphi + i}{\tan\varphi - i} =$$

$$= \frac{i + \tan\varphi}{i - \tan\varphi} = \frac{(-i)\ \cos\varphi\, i + \sin\varphi}{(-i)\ \cos\varphi\, i - \sin\varphi} =$$

$$= \frac{\cos\varphi - i \sin\varphi}{\cos\varphi + i \sin\varphi} = \frac{e^{-i\varphi}}{e^{i\varphi}} = e^{-2i\varphi}$$

$$\Rightarrow \quad (r, r', j, \bar{j}) = e^{-2i\varphi}$$

$\exists_0$ $z = |z|\, e^{i\varphi}$

$z \neq 0$

$\log z =$

$\log|z| + i\varphi$

definita su un'opportuna ☆ superficie di Riemann

è a meno di multipli int di 2π

$$-2i\varphi = \log(r, r', j, \bar{j})$$

$$\varphi = \frac{i}{2} \log(r\, r'\, j\, \bar{j})$$

def a meno di $k\pi$

in particolare $\quad \varphi = \frac{\pi}{2} \quad (+\, k\pi) \iff$

$$\boxed{(r\, r'\, j\, \bar{j}) = -1 \qquad \text{gruppo armonico}}$$

☆ relazioni metriche recuperate tramite la geometria proiettiva