La formula di Bolyai - Lobačevskij

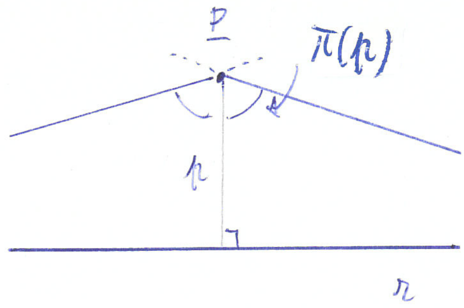
V2

MATEMATICHE COMPLEMENTARI II

Prof. Marco Spera, UCSC Brescia

Lezione XXXII

geometria iperbolica

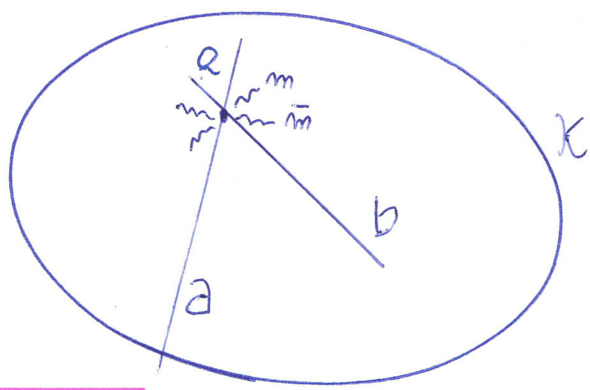


angolo di parallelismo

$$\boxed{\tan \pi(p) = \frac{1}{\sinh p}}$$

In geometria iperbolica, per un pto P esterno ad una retta r, possono condursi esattamente due rette parallele (in senso stretto) (nei due versi). La formula di BL lega la distanza (iperbolica) p di P da r all'angolo $\pi(p)$ formato da ognuna delle due semirette condotte. [In geometria euclidea si avrebbe identicamente $\pi(p) = \frac{\pi}{2}$].

Per stabilire la formula nel modello di Beltrami - Klein dobbiamo definire la misura dell'angolo tra due rette. Traendo ispirazione dalla formula di Laguerre testè discussa poniamo, con riferimento alla figura sottostante

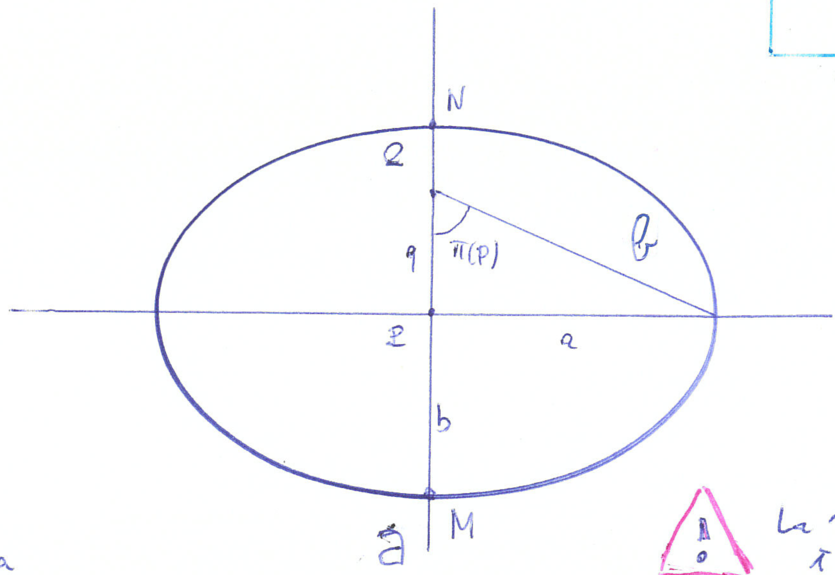


$$\boxed{\widehat{ab} := k \cdot \log\,(a\, b\, \bar{m}\, m)}$$

porremo poi $k = \frac{1}{2i}$ } birapporto

Nella formula utilizzeremo opportune coordinate tangenti. Con $m, \bar{m}$ indichiamo le rette (e le loro coordinate) uscenti da Q e tangenti all'assoluto (K: conica a pti reali) (sono complesse coniugate) assoluto

$$\mathcal{K}: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



$Q: (0,q)$
$P: (0,0)$
$M: (0,-b)$
$N: (0,b)$

La misura di $\pi(p)$ non è quella euclidea.

distanza iperbolica

$$p = \delta(P,Q) = k \log(P,Q,N,M) \qquad \text{poniamo } k=\frac{1}{2}$$

$$(P,Q,M,N) = \frac{PN}{QM} : \frac{PM}{QM} = \frac{b}{b-q} : \frac{-b}{-b-q} = \frac{b+q}{b-q}$$

$$p = \frac{1}{2}\log\frac{b+q}{b-q} = \log\underbrace{\sqrt{\frac{b+q}{b-q}}}_{>1} > 0$$

$$\boxed{\frac{1}{\sinh p} = \frac{2}{e^{p}-e^{-p}} = \frac{2}{\sqrt{\frac{b+q}{b-q}}-\sqrt{\frac{b-q}{b+q}}} = \frac{2}{\frac{b+q-b+q}{\sqrt{b^2-q^2}}} = \frac{2}{\frac{2q}{\sqrt{b^2-q^2}}} = \frac{\sqrt{b^2-q^2}}{q} = \sqrt{\frac{b^2}{q^2}-1}}$$

Altra forma: $\tan\frac{\pi(p)}{2} = e^{-p}$

$$\tan\pi(p) = \frac{2\tan\frac{\pi(p)}{2}}{1-\tan^2\frac{\pi(p)}{2}} = \frac{e^{p}\cdot 2e^{-p}}{e^{p}\cdot(1-e^{-2p})} = \frac{2}{e^{p}-e^{-p}} = \frac{1}{\sinh p}$$

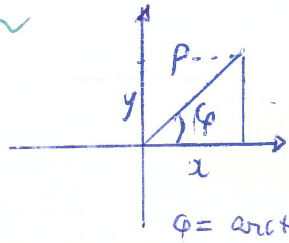
coordinate tangenti

$$(a\,b\,\bar{m}\,m) = \left(\overset{m_1}{\infty},\ \overset{m_2}{-\frac{q}{a}},\ \underbrace{\overset{m_3}{-\frac{i}{a}\sqrt{b^2-q^2}}}_{\bar{m}},\ \underbrace{\overset{m_4}{+\frac{i}{a}\sqrt{b^2-q^2}}}_{m}\right) \quad (+)$$

vedi oltre

$$= \frac{m_1-m_3}{m_1-m_4}\cdot\frac{m_2-m_4}{m_2-m_3} = \underbrace{\frac{\infty+\frac{i}{a}\sqrt{b^2-q^2}}{\infty-\frac{i}{a}\sqrt{b^2-q^2}}}_{=1}\cdot\frac{-\frac{q}{a}-\frac{i}{a}\sqrt{b^2-q^2}}{-\frac{q}{q}+\frac{i}{a}\sqrt{b^2-q^2}}$$

$$\equiv \frac{\cancel{\rho}\, e^{i\varphi}}{\cancel{\rho}\, e^{-i\varphi}} = e^{2i\varphi}$$



$\varphi = \arctan\frac{y}{x}$, $x \neq 0$

$$\log(a\,b\,\bar{m}\,m) = 2i\varphi \quad , \quad \hat{ab} = \frac{1}{2i}(2i\varphi) = \varphi$$

$$\underset{\pi(p)}{\underset{\parallel}{\tan \hat{ab}}} = \frac{-\frac{1}{a}\sqrt{b^2-q^2}}{-\frac{q}{a}} = \frac{\sqrt{b^2-q^2}}{q} = \sqrt{\frac{b^2}{q^2}-1} \qquad \square$$

(+) Determiniamo le tangenti da Q a $\mathcal{X}$ in modo elementare:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \\ y = px+q \end{cases} \quad \text{sostituendo} \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{(px+q)^2}{b^2}=1$$

$$\Rightarrow b^2x^2 + a^2(px+q)^2 - a^2b^2 = 0$$

$$(a^2p^2+b^2)x^2 + 2a^2pqx + a^2(q^2-b^2) = 0$$

$$\cancel{a^4p^2q^2} - \cancel{a^4p^2q^2} - a^2\cancel{b^2}q^2 + a^{\cancel{4}}p^2\cancel{b^2} + \cancel{a^2}b^{\cancel{4}} = 0$$

$$-q^2 + a^2p^2 - b^2 = 0$$

$$a^2p^2 = q^2-b^2$$

Si impone $\Delta = 0$, cioè $a^4p^2q^2 - (a^2p^2+b^2)(a^2q^2-a^2b^2) = 0$

ovvero $\boxed{a^2p^2 = q^2-b^2} \Rightarrow p = \pm\frac{i}{a}\sqrt{b^2-q^2}$ $\quad m = +\frac{i}{a}\sqrt{\ }$

$\bar{m} = -i\sqrt{\ }$

* In geometria iperbolica esiste un'unità di misura naturale delle lunghezze, ciò che non avviene in geometria euclidea. In quest'ultima c'è un'unità di misura naturale per gli angoli: l'angolo retto. Ciò verrà ulteriormente chiarito nel capitolo successivo.