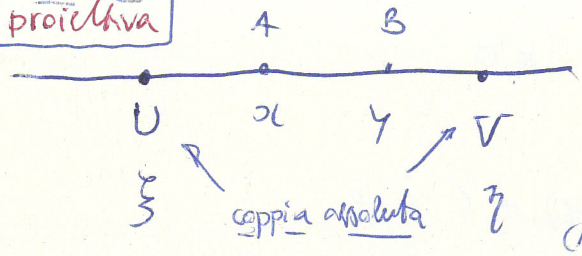
Lezione XXXIII

★ metrica proiettiva



$(A,B,C,D) = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$

$$\boxed{\delta(A,B) = k \log (U V A B) = k \log (\xi \eta x y)}$$ $= k \log (x y \xi \eta)$

☆ movimenti: le ∞^1 trasf. proiettive che lasciano fissi U e V e tali che $\boxed{\delta(A',B') = \delta(A,B)}$

$$\delta(A,U) = k \log (\xi, \eta\, x, \xi) = k \log \frac{\xi - x}{\eta - x} : \frac{\overset{0}{\xi - \xi}}{\eta - \xi} = \infty$$

$$\delta(A,V) = \infty$$

$$\boxed{\Omega_{zz} = a z^2 + 2bz + c = 0}$$ Equazione della coppia assoluta

$z = \xi, \eta$ radici

$(\star)$ $\boxed{\Omega_{zz} = a z_1^2 + 2 b z_1 z_0 + c z_0^2 = 0}$ forma omogenea $z = \frac{z_1}{z_0} (x_0)$

$\boxed{\Omega_{xy} : a x_1 y_1 + b (x_1 y_0 + x_0 y_1) + c x_0 y_0}$ forma polare

$$z = \lambda x + y$$

$$\boxed{\begin{cases} \rho z_1 = \lambda x_1 + y_1 \\ \rho z_0 = \lambda x_0 + y_0 \end{cases}}$$

Sostituiamo in $(\star)$ (eliminando ρ^{-2})

$$\therefore \; a(\lambda x_1 + y_1)^2 + 2b(\lambda x_1 + y_1)(\lambda x_0 + y_0) + c(\lambda x_0 + y_0)^2 = 0$$

$$= \lambda^2 \overbrace{\{ a x_1^2 + 2b x_1 x_0 + c x_0^2 \}}^{\Omega_{xx}}$$

$$+ 2\lambda \overbrace{\{ a x_1 y_1 + b(x_1 y_0 + x_0 y_1) + c x_0 y_0 \}}^{\Omega_{xy}}$$

$$+ \overbrace{\{ y_1^2 + 2b y_1 y_0 + c y_0^2 \}}^{\Omega_{yy}} a = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\Omega_{xx}\lambda^2 + 2\Omega_{xy}\lambda + \Omega_{yy} = 0}$$

radici: $\rightarrow \xi, \eta \quad (U, V) \rightsquigarrow \lambda = \lambda_1, \lambda_2$

$y \rightarrow \lambda = 0$

$x \rightarrow \lambda = \infty$

$$(\xi\,\eta\,x\,y) = (\lambda_1, \lambda_2, \infty, 0) = \underbrace{\frac{\lambda_1 - \infty}{\lambda_2 - \infty}}_{=1} : \frac{\lambda_1 - 0}{\lambda_2 - 0} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

$1 \leftrightarrow +$

$2 \leftrightarrow -$

ora

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\Omega_{xy} \pm \sqrt{\Omega_{xy}^2 - \Omega_{xx}\Omega_{yy}}}{\Omega_{xx}}$$

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{\Omega_{xy} + \sqrt{\Omega_{xy}^2 - \Omega_{xx}\Omega_{yy}}}{\Omega_{xy} - \sqrt{\Omega_{xy}^2 - \Omega_{xx}\Omega_{yy}}}$$

*** **formula di Klein**

$$\Rightarrow \boxed{\delta(x,y) = k \log \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = k \log\left(\frac{\Omega_{xy} + \sqrt{\ }}{\Omega_{xy} - \sqrt{\ }}\right)}$$

* metrica proiettiva su un forma di 1ª specie

4 Forme equivalenti

occhio al log...

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\cos\left(\frac{1}{2i} \log a\right) = \frac{e^{i \frac{1}{2i} \log a} + e^{-i \frac{1}{2i} \log a}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}}}{2} = \frac{a+1}{2\sqrt{a}}$$

$$\boxed{\log a = 2i \arccos \frac{a+1}{2\sqrt{a}}}$$

$$\cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$$

$$\cosh iz = \cos z$$

$$a = \cos z \qquad z = \arccos a$$

$$\parallel \qquad iz = i \arccos a$$

$$\cosh iz \qquad = \text{sett ch } a$$

$$i \arccos a = \text{sett ch } a$$

$$\left(i \cos^{-1} a = \text{ch}^{-1} a \right)$$

$$\delta(x,y) = 2i R \arccos \frac{\dfrac{\Omega_{xy} + \sqrt{\Omega_{xy}^2 - \Omega_{xx}\Omega_{yy}}}{\Omega_{xy} - \sqrt{\ }} + 1}{2\sqrt{\dfrac{\Omega_{xy} + \sqrt{\ }}{\Omega_{xy} - \sqrt{\ }}}}$$

$$\boxed{\delta(x,y) = 2ik \arccos \left\{ \frac{\dfrac{\cancel{2}\,\Omega_{xy}}{\Omega_{xy} - \sqrt{\ }}}{\cancel{2}\,\dfrac{\sqrt{\Omega_{xy} + \sqrt{\ }}}{\sqrt{\Omega_{xy} - \sqrt{\ }}}} \right\}}$$

$$= 2ik \arccos \frac{\Omega_{xy}}{\sqrt{(\Omega_{xy} - \sqrt{\ })(\Omega_{xy} + \sqrt{\ })}}$$

$$= 2ik \arccos \frac{\Omega_{xy}}{\sqrt{\cancel{\Omega_{xy}^2} - \cancel{\Omega_{xy}^2} + \Omega_{xx}\Omega_{yy}}}$$

$$\boxed{= 2ik \arccos \frac{\Omega_{xy}}{\sqrt{\Omega_{xx}\Omega_{yy}}}}$$

$$= 2k \operatorname{sett\,cosh} \frac{\Omega_{xy}}{\sqrt{\Omega_{xx}\Omega_{yy}}}$$

or $\arccos \xi = \arcsin \sqrt{1 - \xi^2}$ (!)

$$= 2ik \arcsin \sqrt{1 - \frac{\Omega_{xy}^2}{\Omega_{xx}\Omega_{yy}}} \quad \boxed{= 2ik \arcsin \sqrt{\frac{\Omega_{xx}\Omega_{yy} - \Omega_{xy}^2}{\Omega_{xx}\Omega_{yy}}}}$$

classificazione

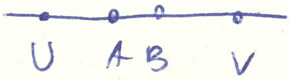
$$\Omega_{xx} = a x^2 + 2bx + c = 0$$

$$\Omega_{zz} = a z_1^2 + 2b z_1 z_0 + c z_0^2 = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = b^2 - ac$$

$\boxed{b^2 - ac > 0}$

U e V reali e distinti



$(UV\ AB)$ reale e positivo

$\delta(AB) = k \log (UV\ AB)$ reale se k reale

(basta considerarne uno dei due segmenti)

★ metrica iperbolica

$\boxed{b^2 - ac < 0}$

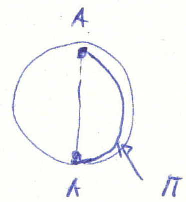
$(UV\ AB) \sim (t + i\nu,\ t - i\nu,\ \alpha,\ \beta)$

se $k = i\xi$, $\xi \in \mathbb{R}$ si ha distanza reale e periodo reale

★ metrica ellittica

$k = \frac{i}{2}$ ⇝ periodo $= \pi$

cf:



$b^2 - ac = 0$

$(UU\ AB) = 1$ ⇝ $\log 1 = 0$

metrica parabolica

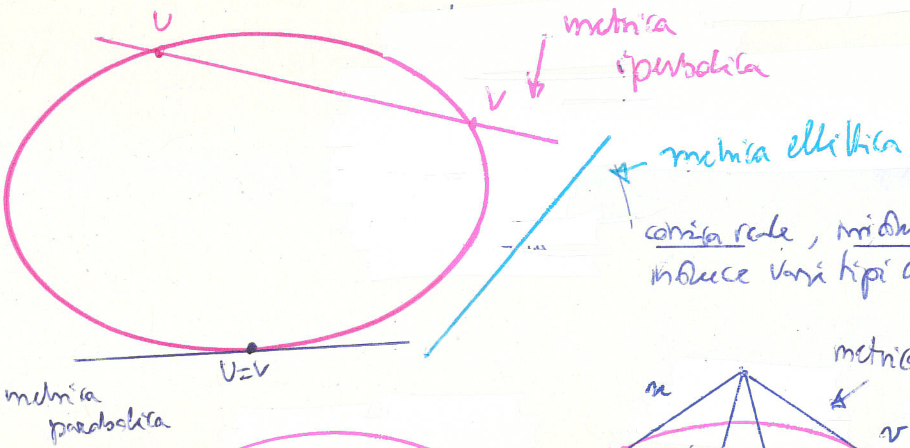
distanza $= 0$ $(k \neq \infty)$

o indeterminata

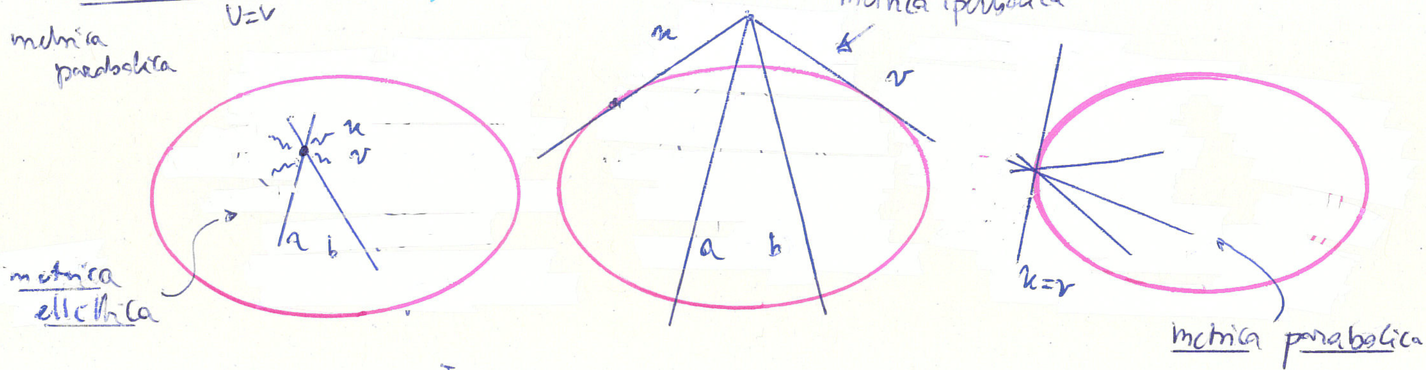
⚠ da trattare con cautela

metriche su forme di 2ª specie (assoluto di Cayley)

prospetto



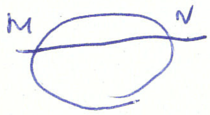
conica reale, irriducibile, per fissare le idee: induce vari tipi di metriche sulle rette del piano



$\mathcal{C}$ assoluto $\quad \Omega_{xx} = X^T A X \qquad \Omega_{xy} = X^T A Y$

$\mathcal{C}^*$ duale $\quad \Psi_{uu} = U^T A^{-1} U$

$$\delta(AB) = \delta(x,y) = k \log(ABMN) = k \log \frac{\Omega_{xy} + \sqrt{\Omega_{xy}^2 - \Omega_{xx}\Omega_{yy}}}{\Omega_{xy} - \sqrt{}}$$



$$= 2ik \arcsin \frac{\sqrt{\Omega_{xx}\Omega_{yy} - \Omega_{xy}^2}}{\sqrt{\Omega_{xx}\Omega_{yy}}}$$

qui $k = \frac{1}{2i}$

$$\hat{ab} = \frac{1}{2i} \log(a,b,m,n) = \arcsin \frac{\sqrt{\Psi_{uu}\Psi_{vv} - \Psi_{uv}^2}}{\sqrt{\Psi_{uu}\Psi_{vv}}}$$

tra le altre

coord. dirette: (x_i)
$= (v_i)$

La geometria euclidea come limite di geometrie non euclidee

assoluto

$\varepsilon \neq 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

$$\Omega_{xx} = \varepsilon(x_1^2 + x_2^2) + x_0^2$$

$$\Omega_{yy} = \varepsilon(y_1^2 + y_2^2) + y_0^2$$

$$\Omega_{xy} = \varepsilon(x_1 y_1 + x_2 y_2) + x_0 y_0$$

$$\boxed{\delta(AB) = 2ki \cdot \arcsin\sqrt{\frac{\Omega_{xx}\Omega_{yy} - \Omega_{xy}^2}{\Omega_{xx}\Omega_{yy}}}}$$

Si osservi che $\dfrac{\Omega_{xy}^2}{\Omega_{xx}\Omega_{yy}} \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \dfrac{x_0^2 y_0^2}{x_0^2 y_0^2} = 1$

$$\Rightarrow \arcsin\sqrt{1 - \frac{\Omega_{xy}^2}{\Omega_{xx}\Omega_{yy}}} \sim \sqrt{1 - \frac{\Omega_{xy}^2}{\Omega_{xx}\Omega_{yy}}} \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0$$

Troviamo l'ordine di infinitesimo

$$\frac{\sqrt{\Omega_{xx}\Omega_{yy} - \Omega_{xy}^2}}{\sqrt{\Omega_{xx}\Omega_{yy}}} = $$

$$\varepsilon^2 (x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2) + \varepsilon\{x_0^2(y_1^2 + y_2^2) + y_0^2(x_1^2 + x_2^2)\} + x_0^2 y_0^2$$

$$- \varepsilon^2(x_1 y_1 + x_2 y_2)^2 - 2\varepsilon x_0 y_0 (x_1 y_1 + x_2 y_2) - x_0^2 y_0^2$$

$\Rightarrow$ l'ordine è $\sqrt{\varepsilon}$: ponendolo in evidenza, e trascuriamo i termini successivi

$$\sqrt{\varepsilon} \cdot \sqrt{x_0^2 y_1^2 + x_0^2 y_2^2 + y_0^2 x_1^2 + y_0^2 x_2^2 - 2 x_0 y_0 x_1 y_1 - 2 x_0 y_0 x_2 y_2}$$

v. oltre

XXXIII-8

$$= \sqrt{\varepsilon}\ \frac{\sqrt{(x_0 y_1 - x_1 y_0)^2 + (x_0 y_2 - x_2 y_0)^2 + \dots}}{\sqrt{x_0^2 y_0^2}}$$

si faccia

$\underbrace{2 R i \sqrt{\varepsilon}}_{=1}$ in $\boxed{\delta(AB) = 2Ri \arcsin \sqrt{\frac{\Omega_{xx}\Omega_{yy} - \Omega_{xy}^2}{\Omega_{xx}\Omega_{yy}}}}$

si ha, per $\varepsilon \to 0$ (+) $(\Rightarrow R \to \infty)$

$$\delta^{xy}(AB) = \sqrt{\left(\underbrace{\frac{x_1}{x_0}}_{x_A} - \underbrace{\frac{y_1}{y_0}}_{x_B}\right)^2 + \left(\underbrace{\frac{x_2}{x_0}}_{y_A} - \underbrace{\frac{y_2}{y_0}}_{y_B}\right)^2}$$

$$= \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

★ distanza euclidea
(caso "parabolico",
l'assoluto degenera in $x_0 = 0$
contato due volte

(+)

★ Sia per es.

$\varepsilon < 0$ $\quad \varepsilon = -|\varepsilon| = |\varepsilon| e^{-i\pi}$, $\quad \sqrt{\varepsilon} = \sqrt{|\varepsilon|}\, e^{-i\frac{\pi}{2}} = -\sqrt{|\varepsilon|} \cdot i$

$\varphi \in [-\pi, \pi)$ argomento principale

$\mathbb{C}$

$-2R\, i \sqrt{|\varepsilon|} \cdot i = 1 \qquad 2R\sqrt{|\varepsilon|} = 1$

$$R = \frac{1}{2\sqrt{|\varepsilon|}} > 0$$

"l'unità di lunghezza tende all'∞"

XXXIII-9

* Esempio: angoli tra rette e passaggio al limite euclideo

$$\boxed{\mathcal{C}: \quad \varepsilon(x_1^2 + x_2^2) + x_0^2 = 0}$$

$\mathcal{C}^*$ $(A \to A^{-1})$

conica inviluppo

$$\boxed{u_1^2 + u_2^2 + \varepsilon u_0^2 = 0}$$

$\parallel \; \Psi_{uu}$

* angolo tra due rette (u_0, u_1, u_2), (v_0, v_1, v_2)

[$u_0 x_0 + u_1 x_1 + u_2 x_2 = 0$ coord. di rette)

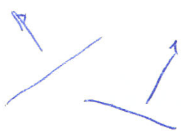
$$= \arcsin \sqrt{1 - \frac{\Psi_{uv}^2}{\Psi_{uu}\Psi_{vv}}}$$

$$\Psi_{uv} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \varepsilon u_0 v_0$$

$$\frac{\Psi_{uv}^2}{\Psi_{uu}\Psi_{vv}} = \frac{(u_1 v_1 + u_2 v_2 + \varepsilon u_0 v_0)^2}{(u_1^2 + u_2^2 + \varepsilon u_0^2)(v_1^2 + v_2^2 + \varepsilon v_0^2)}$$

Se $\varepsilon \to 0$ si trova

$$\boxed{\frac{(u_1 v_1 + u_2 v_2)^2}{(u_1^2 + u_2^2)(v_1^2 + v_2^2)} = \cos^2 \alpha_{eucl.}}$$



✓

✧ Commento importante

Nel ricavare la metrica euclidea abbiamo proceduto in due modi differenti:

- per le lunghezze

Si è alterata l'"unità di misura":

$$\mathcal{R} = \frac{1}{2\sqrt{|\varepsilon|}}$$

contestualmente al tendere di ε a 0 si ha $\mathcal{R} \to \infty$

- per gli angoli

Si è posto $\mathcal{R} = \frac{1}{2i}$ una volta per tutte

Ciò non deve sorprendere:

In geometria euclidea, lo ricordiamo, non c'è un'unità di lunghezza assoluta, contrariamente al caso degli angoli, in cui l'unità di misura naturale è l'angolo retto.