V2

MATEMATICHE COMPLEMENTARI II

Prof. M. Spera UCSC Brescia

Lezione XXXIV

Collegamento con la geometria differenziale

Riprendiamo

$$\boxed{\delta(x,y)} = 2ic \arcsin \frac{\sqrt{\Omega_{xx}\Omega_{yy} - \Omega_{xy}^2}}{\sqrt{\Omega_{xx}\Omega_{yy}}}$$

★ Agiamo in modo informale

Sia ora $y = x + dx$. È $\Omega_{xy} = \Omega_{xx} + \Omega_{x,dx}$

$$\Omega_{yy} = \Omega_{xx} + 2\Omega_{xdx} + \Omega_{dxdx}$$

$$\Omega_{xx}\Omega_{yy} - \Omega_{xy}^2 = \Omega_{xx}(\Omega_{xx} + 2\Omega_{xdx} + \Omega_{dx,dx}) - (\Omega_{xx} + \Omega_{xdx})^2 =$$

$$= \cancel{\Omega_{xx}^2} + \cancel{2\Omega_{xx}\Omega_{xdx}} + \Omega_{xx}\Omega_{dxdx} - \cancel{\Omega_{xx}^2} - \cancel{2\Omega_{xx}\Omega_{xdx}} - \Omega_{xdx}^2$$

$$= \Omega_{xx}\Omega_{dxdx} - \Omega_{xdx}^2$$

$\Rightarrow$ (al prim'ordine)

metrica
$$\boxed{ds^2 = 4c^2 \frac{\Omega_{xdx}^2 - \Omega_{xx}\Omega_{dxdx}}{\Omega_{xx}^2}}$$

Sia $\boxed{\Omega_{xx} = x_1^2 + x_2^2 - 4c^2}$ $\quad \Omega_{dxdx} = dx_1^2 + dx_2^2$

$$\Omega_{xdx} = x_1 dx_1 + x_2 dx_2$$

Si ha (ponendo $x_1 = x$, $x_2 = y$)

$$ds^2 = 4c^2 \frac{(x\,dx + y\,dy)^2 - (x^2+y^2-4c^2)(dx^2+dy^2)}{(x^2+y^2-4c^2)^2}$$

$$= 4c^2 \frac{-(y\,dx - x\,dy)^2 + 4c^2(dx^2+dy^2)}{(x^2+y^2-4c^2)^2}$$

poniamo allora $x = \rho\cos\varphi \quad y = \rho\sin\varphi$

Si arriva a:

$$\boxed{ds^2 = \overset{E}{\frac{16c^4}{(r^2-4c^2)^2}}\,d\rho^2 - \overset{G}{\frac{4c^2\rho^2}{r^2-4c^2}}\,d\varphi^2}$$

Calcoliamo la curvatura associata alla metrica

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left[\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)_u\right]$$

Si trova

$$\boxed{K = -\frac{1}{4c^2}}$$

assoluto $x^2+y^2-4c^2=0$ conica reale

★ Nel piano iperbolico c è reale $\Rightarrow K < 0$

se $c = i\xi$, $\xi \in \mathbb{R}$ è $K > 0$

(geometria ellittica) conica immaginaria

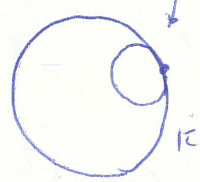
se $c \to \infty$ è $K = 0$

geometria euclidea

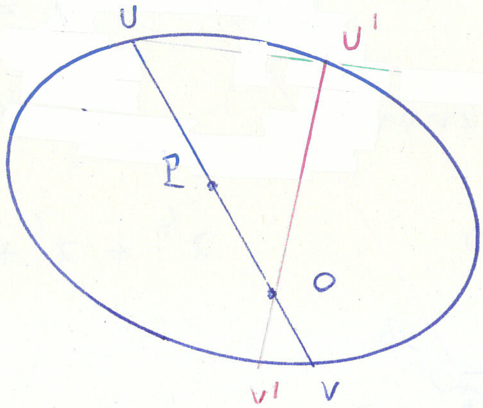
4 Circonferenze in geometria iperbolica   stessa def.

- cicli (centro proprio)
- oricicli (centro improprio) raggio infinito
- ipercicli (centro ideale)

conica iperosculatrice
contatto quadripunto



Come si costruisce il cerchio di centro O passante per un pto dato P ?



R: fissata una retta U'V' per O, si determini la proiettività

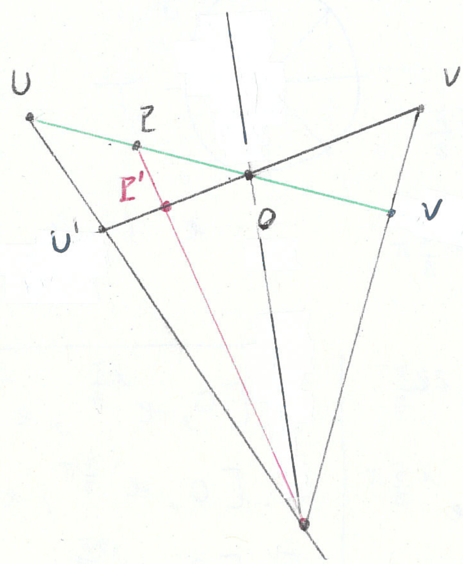
U ↦ U'
V ↦ V'
O ↦ O

in particolare, sarà una prospettività

nel modo solito(+). Essa manderà P ↦ P' e conserverà il birapporto

$(OP, UV) = (O, P', U', V')$

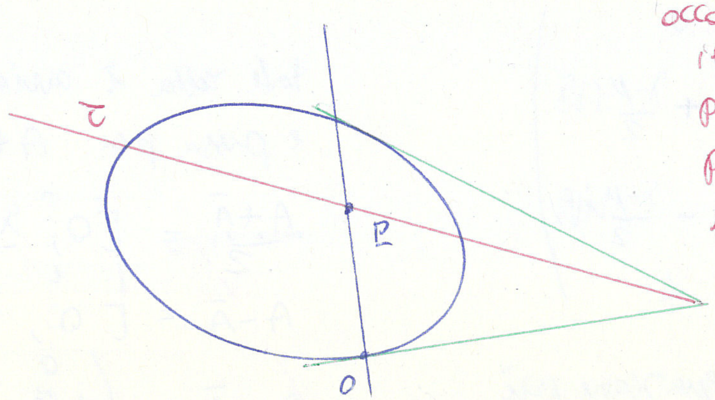
(+)



Se O è improprio si avrà un oriciclo, se O è ideale un iperciclo

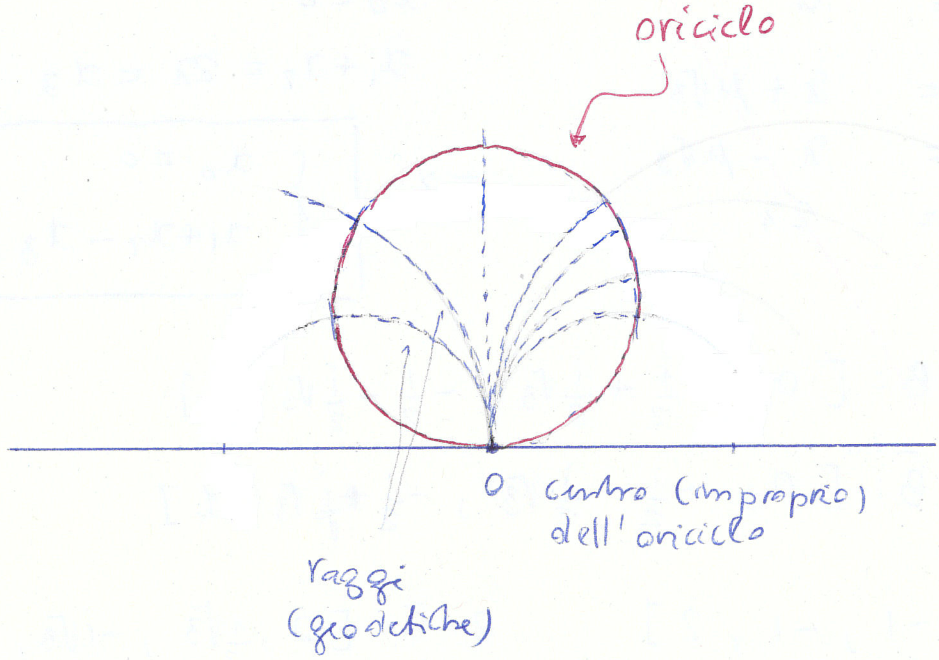
Problema tracciare la tangente τ all'oriciclo di centro O in un suo punto P

R: τ deve essere $\perp$ OP (ciò è vero anche in geometria iperbolica). Pertanto occorre e basta individuare il polo di OP e condurre per quest'ultimo la retta per P, che è la tangente richiesta



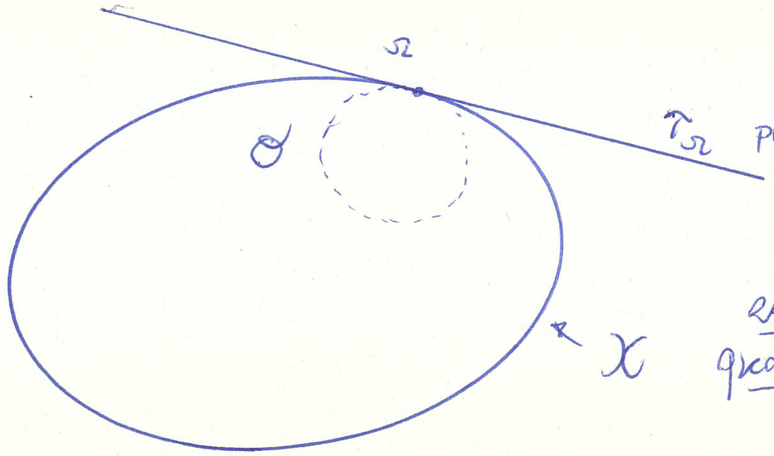
Nota: in questo modo possiamo costruire un oriciclo come inviluppo delle sue tangenti

Nel semipiano superiore:



4 Cenni sulla geometria iperbolica nello spazio

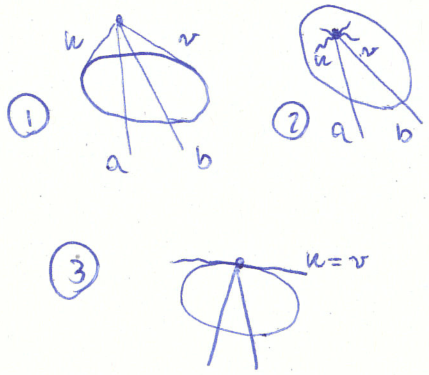
costruzioni simili...



τ_Ω piano tangente a $\mathcal{X}$ in Ω, improprio.

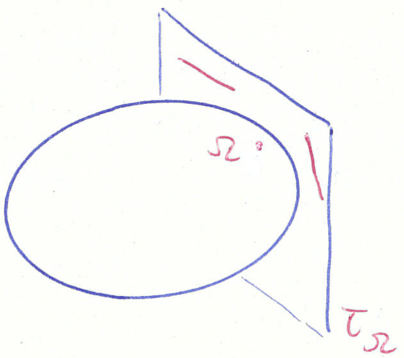
assoluto: quadrica a pti ellittici

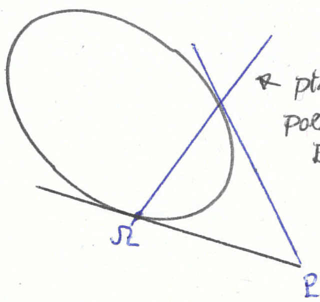
In particolare, un' orisfera è una sfera di centro improprio ($\Rightarrow R$ è ∞). Tale concetto gioca un ruolo cruciale nelle costruzioni dei "padri fondatori", dovuto al fatto che **su un' orisfera vale la geometria euclidea**!!!



geometrie angolari

1. iperbolica
2. ellittica
3. parabolica

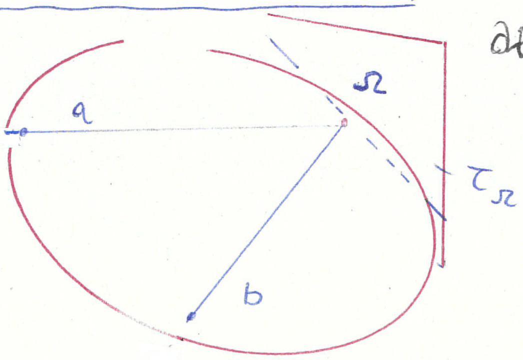




piano per Ω = polare di $P \in \tau_\Omega$

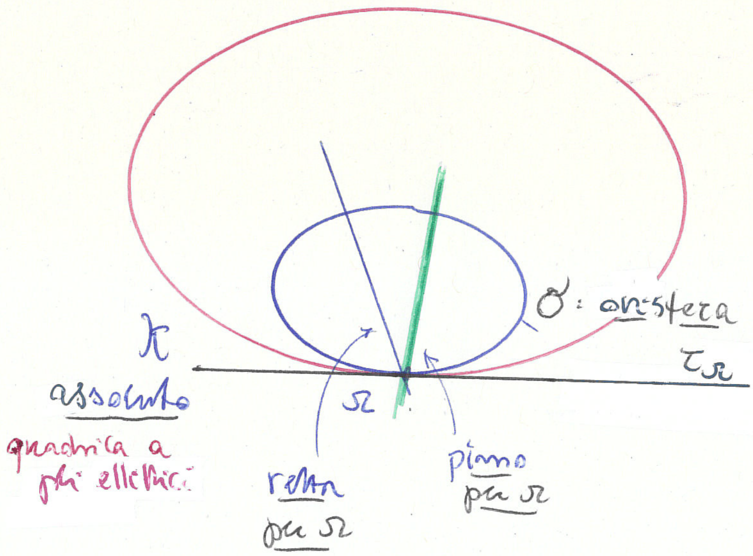
Su τ_Ω la geometria è ellittica per le distanze e parabolica per le misure angolari

ad una retta $PQ \in \tau_\Omega$ corrisponde una retta per Ω (sua polare; è l'intersezione dei piani polari di P e Q



Si considerino le stelle di piani e rette di centro Ω.

La geometria di distanza sull'orisfera $\mathcal{O}$ sarà la geometria angolare della stella di rette, che è parabolica.
Pertanto su di essa vale la geometria euclidea



⋮

"O fim duma viagem é apenas o começo doutra"

J. Saramago

(Viagem a Portugal)