# GEOMETRIA II

Prof. M. Spera UCSC, Brescia

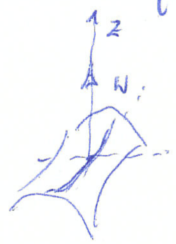
## Prova scritta del 20 settembre 2018

(1) Nello spazio ordinario, siano dati:

$\Sigma$ : $z = \sin x \sin y$

$\pi$ : $x - y = 0$

$\mathcal{C} = \Sigma \cap \pi$ : $\begin{cases} z = \sin x \sin y \\ x - y = 0 \end{cases}$




orientamento di $\Sigma$

Sia poi $P : (0,0,0)$ $(\in \Sigma \cap \pi)$

Determinare la prima e la seconda forma fondamentale di $\Sigma$ in $P$, le curvature principali, la curvatura gaussiana la curvatura media.
Successivamente si calcolino la curvatura normale $k_n^{\mathcal{C}}(P)$ e quella geodetica $k_g^{\mathcal{C}}(P)$ (in $P$).

(2) Si calcoli direttamente la curvatura di $\mathcal{C}$ in $P$ e, successivamente, si ricalcoli $k_n^{\mathcal{C}}(P)$.

Tempo a disposizione 1h.30m

Le risposte vanno adeguatamente giustificate

1

Geometria II
2017/2018

$\Sigma: \; z = \sin x \sin y$

$\pi: \; x - y = 0 \qquad \mathcal{C}: \begin{cases} z = \sin x \sin y & \Sigma \\ x - y = 0 & \pi \end{cases}$

Sia $P: (0,0,0) \quad (\in \Sigma)$

Calcolare $k_n^{\mathcal{C}}(P)$ e $k_g^{\mathcal{C}}(P)$.

Soluzione rapida

$$\sin x = x + \dots$$

$$z = \underset{f(x,y)}{\sin x \sin y} = xy + \dots$$

$P': (0,0)$ su $(x,y)$ è pto critico per $z$ e $z(P') = P$

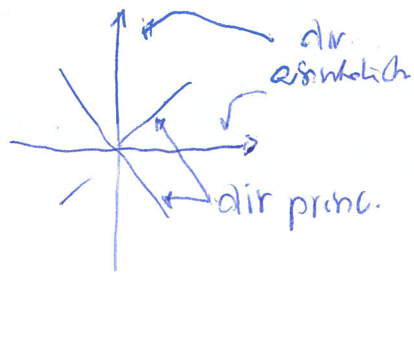
$$\mathcal{H}(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \det(\;) = -1 = K(P)$$

☆ l'indicatrice di Dupin sarà necessariamente della forma $xy = c$ ~ iperbole equilatera

$\Rightarrow H = k_1 + k_2 = 0 \quad (\text{in } P) \quad \Rightarrow \quad k_1 = \pm k_2 = \pm 1$

Sia $k_1 = -1 \quad k_2 = +1 \qquad (k_1 < 0 < k_2)$

$T_P \Sigma$ = piano $(x,y)$



Data la natura di $\mathcal{C}$, sarà $k^{\mathcal{C}}(P) = |k_n^{\mathcal{C}}(P)|$

$\Rightarrow$ la dir. considerata è <u>principale</u> $= +1$

e poiché, necessariamente $k_g^{\mathcal{C}}(P) = 0$

$(k^2 = k_n^2 + k_g^2)$

rimane solo da vedere se $k_n^{\mathcal{C}}(P) = \pm 1$

Possiamo procedere, in modo relativamente elementare, così:

$' = \frac{d}{dx}$

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x = x \\ y = x \\ z = \sin^2 x \end{cases}$$

cioè $\underline{r} = (x, x, \sin^2 x)$

$\underline{r}' = (1, 1, 2\sin x \cos x)$

$\underline{r}'' = (0, 0, 2[\cos^2 x - \sin^2 x])$

calcolo <u>diretto</u> di $k^{\mathcal{C}}(P)$

se $x = 0$: $\underline{r} = (0, 0, 0)$

$\underline{r}' = (1, 1, 0)$

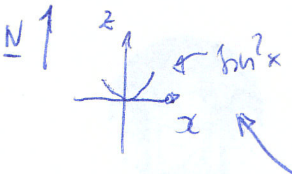
$\underline{r}'' = (0, 0, 2)$

$$k = \frac{\|\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}\|}{\|\dot{\underline{r}}\|^3} = \frac{\sqrt{8}}{(\sqrt{2})^3} = \frac{(\sqrt{2})^3}{(\sqrt{2})^3} = 1$$

$$\underline{r}' \times \underline{r}'' = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \underline{i}\cdot 2 - \underline{j}\cdot 2 + 0\cdot\underline{k} = (2, -2, 0)$$

Conferma le cons. prec.

Dato che $\mathcal{C}$ si trova nella situazione seguente





($P$, loc. convessa) si avrà $k_n^{\mathcal{C}}(0) = +1$

## Calcoli Standard

in $P:(0,0,0)$

$$\Sigma: \quad \underline{r} = (x,\ y,\ \sin x \sin y) \qquad (0,0,0)$$

$$\underline{r}_x = (1,\ 0,\ \cos x \sin y) \qquad (1,0,0)$$

$$\underline{r}_y = (0,\ 1,\ \sin x \cos y) \qquad (0,1,0)$$

$$\underline{r}_{xx} = (0,\ 0,\ -\sin x \sin y) \qquad (0,0,0)$$

$$\underline{r}_{xy} = (0,\ 0,\ \cos x \cos y) \qquad (0,0,1)$$

$$\underline{r}_{yy} = (0,\ 0,\ -\sin x \sin y) \qquad (0,0,0)$$

in $P$ $\qquad \Rrightarrow \underline{N}(P) = (0,0,1)$

$$E = 1 = G \qquad F = 0$$

$$e = 0, \quad f = 1, \quad g = 0$$

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{-1}{1} = -1 \qquad (\text{in } P)$$

$$H = \frac{1}{2}\,\frac{eG - 2fF + Eg}{EG - F^2} = 0 \qquad (\text{in } P)$$

$\Rightarrow k_1 = -1, \quad k_2 = +1$ come trovato prima $\qquad$ Conv: $k_1 < k_2$

Linee di curv: $\begin{vmatrix} \dot y^2 & -\dot x \dot y & \dot x^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} \dot y^2 & -\dot x \dot y & \dot x^2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$$+\dot x^2 - \dot y^2 = 0 \qquad \dot x = \pm \dot y$$

(come prima)

Si ha poi

$$k_n^P(P) = k_2(P) = 1$$