Geometria II

Prof. M. Spera, UCSC Brescia

a.a. 2017/18

Prova scritta del 28 giugno 2018

① Determinare la rigata $\mathcal{R}$ di direttrice

$$\mathcal{C}: \begin{cases} x^2+y^2-1=0 \\ z=0 \end{cases}$$

e avente come generatrici le rette P_0V, $P_0 \in \mathcal{C}$

$V = (0,0,-1)$ [cos'è?]

Determinare le due forme fondamentali di $\mathcal{R}$ nonché la curvatura gaussiana di $\mathcal{R}$.
$\mathcal{R}$ è sviluppabile?

② Con rif. all'esercizio ①, dimostrare direttamente che il piano tangente $T \cdot \Sigma$ non varia lungo una generatrice generica.
Determinare altresì le linee asintotiche di $\mathcal{R}$

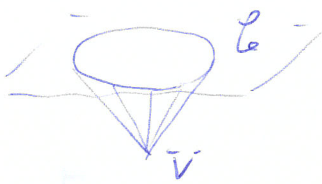
Tempo a disposizione: 1h 30m

Le risposte vanno adeguatamente giustificate.

[Geo II 28/6/2018]

(1)
(2) Sia $\mathcal{C}: \begin{cases} x^2+y^2-1=0 \\ z=0 \end{cases}$, $V=(0,0,-1)$

Determinare la rigata $\mathcal{R}$ di direttrice $\mathcal{C}$ e generatrici le rette P_0V , $P_0 \in \mathcal{C}$ (è un cono)
($\mathcal{R}$ è chiaramente sviluppabile)



$\mathcal{C}: \begin{cases} x = \cos\varphi \\ y = \sin\varphi \\ z = 0 \end{cases}$

$P_0 : (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$

retta P_0V: $Q = P_0 + t(V - P_0)$ $\quad t=0 : P_0$, $t=1$: V

$x = \cos\varphi - t(\cos\varphi) = (1-t)\cos\varphi$

$y = \sin\varphi - t\sin\varphi = (1-t)\sin\varphi$

$z = 0 - t = -t$

$\underline{r}(\varphi, t) = ((1-t)\cos\varphi, (1-t)\sin\varphi, -t)$ $\quad$ ($t=0 \rightsquigarrow \mathcal{C}$; $t=1 \rightsquigarrow V$)

$\underline{r}_\varphi = (-(1-t)\sin\varphi, (1-t)\cos\varphi, 0)$

$\underline{r}_t = (-\cos\varphi, -\sin\varphi, -1)$

$r_\varphi \times r_t = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -(1-t)\sin\varphi & (1-t)\cos\varphi & 0 \\ -\cos\varphi & \sin\varphi & -1 \end{vmatrix}$

$= \underline{i}\{-(1-t)\cos\varphi\} - \underline{j}\{+(1-t)\sin\varphi\} + \underline{k}\{-(1-t)[\underbrace{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi}_{1}]\}$

$\underline{N} = \frac{1}{\| \ \|}(\underline{r}_\varphi \times \underline{r}_t) = \frac{(-(1-t)\cos\varphi, -(1-t)\sin\varphi, -(1-t))}{\| \ \|}$

$= -\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\varphi, \sin\varphi, 1)$

(1) indip. da t $\to$ $\mathcal{R}$ è sviluppabile

$$\underline{N} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\varphi, \sin\varphi, 1)$$

$$\underline{r}_{\varphi\varphi} = (-(1-t)\cos\varphi, -(1-t)\sin\varphi, 0)$$

$$\underline{r}_{\varphi t} = (\sin\varphi, -\cos\varphi, 0)$$

$$\underline{r}_{tt} = (0, 0, 0)$$

$$e = \langle \underline{r}_{\varphi\varphi}, \underline{N} \rangle = -(1-t)\cos^2\varphi - (1-t)\sin^2\varphi = -(1-t) = t-1$$

$$f = \langle \underline{r}_{\varphi t}, N \rangle = 0$$

$$g = 0 \qquad K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \underset{(+)}{=} 0$$

dir asintotiche: $\quad e\dot{u}^2 + 2f\dot{u}\dot{v} + g\dot{v}^2 = 0$

$$e\dot{u}^2 = 0 \qquad \dot{u}^2 = 0$$

$t \neq 1 \qquad \dot{u} = 0$ due volte

(+)

$E = \|r_\varphi\|^2 = (1-t)^2$

$F = 0$

$G = \|r_t\|^2 = 2$

$EG - F^2 = 2(1-t)^2 > 0$ per $t \neq 1$

generatrici del cono contate due volte

(pti parabolici)