GEOMETRIA II

Prof. M. Spera UCSC, Brescia

Prova scritta del 5 settembre 2018

① Sia data la superficie riemanniana astratta

$$\left(\mathcal{U} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x>0, y>0\},\ ds^2 = x^2 dx^2 + y^4 dy^2 \right)$$

Se ne determino la curvatura gaussiana e le relative geodetiche. (Sugg: operare un opportuno cambio di variabili)

② Nel piano (x,y), data $\mathscr{C}: \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases}$,

se ne determini l'evoluta $\mathcal{E}$

Detti poi Q e R i punti di $\mathcal{E}$ corrispondenti, rispettivamente, ai valori $t=0$ e $t=1$, si calcoli la lunghezza dell'arco di evoluta $\widehat{QR}$.

Tempo a disposizione: 1h 30m

Le risposte vanno adeguatamente giustificate

$\boxed{\text{Geometria} \quad 1^\circ \text{ app settembre 2018}}$

① In $U = \{(x,y) \mid x > 0,\ y > 0\}$

si consideri la metrica

$$ds^2 = x^2 dx^2 + y^4 dy^2$$

$(k = 0)$ determinarne la curvatura e le geodetiche

si trova $ds^2 = (x\,dx)^2 + (y^2 dy)^2$

$$= \left[d\,\frac{x^2}{2}\right]^2 + \left[d\,\frac{y^3}{3}\right]^2$$

si ponga $\xi = \dfrac{x^2}{2}$ $\quad \eta = \dfrac{y^3}{3}$

$\Rightarrow ds^2 = d\xi^2 + d\eta^2$ (metrica standard sul piano (ξ, η))

geodetiche (su (ξ,η)) : rette:

$$A\xi + B\eta + C = 0 \qquad (A,B) \neq (0,0)$$

$\rightsquigarrow$ geodetiche iniziali:

$$A\,\frac{x^2}{2} + B\,\frac{y^2}{3} + C = 0 \qquad (A,B) \neq (0,0)$$

(in gen: parabole semicubiche)

(2) $\mathcal{C}: \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases}$

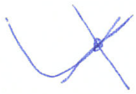
Evoluta:

inviluppo delle normali

$P: (t, t^2)$
$\dot{P} = (1, 2t)$ $\quad i\dot{P} = (-2t, 1)$
$\ddot{P} = (0, 2)$

normali:

$$f = 1\cdot(x-t) + 2t\cdot(y-t^2) = 0$$



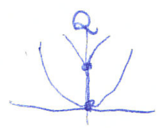
$$\frac{\partial f}{\partial t} = -1 + 2y - 2\cdot 3\cdot t = 0$$

$$2y = 1 + 6t$$
$$y = \frac{1+6t}{2}$$

$$x - t = -2t(y-t^2) = -2t\left(\frac{1+6t}{2} - t^2\right)$$
$$= -2t\,\frac{1+6t-2t^2}{2}$$
$$= -t(1+6t-2t^2)$$

$$\begin{cases} x = -t(1+6t-2t^2) \\ y = \dfrac{1+6t}{2} \end{cases}$$

$t = 0 \to Q: \left(0, \frac{1}{2}\right)$



$t = 1$: $R: \left(7, \frac{7}{2}\right)$ $\quad \ell(Q,R) = |\rho_Q - \rho_R|$

$x = -(+1-6-2)$
$= +7$
$y = \frac{7}{2}$

curvatura di $\mathcal{C}$: $y = x^2$

$$k = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} = \frac{2}{(1+4x^2)^{3/2}}$$

$k(0) = 2$ $\quad k(1) = \dfrac{2}{5^{3/2}}$

R

$$\rho_Q = \frac{1}{2} \qquad \rho_R = \frac{5^{3/2}}{2} \qquad \left(> \frac{1}{2}\right)$$

$$\ell(Q,R) = \rho_R - \rho_Q = \frac{5^{3/2}-1}{2}$$