GEOMETRIA II

Prof. Mauro Spera, UCSC Brescia

Prova scritta del
7 febbraio 2019

① Data la superficie cartesiana $\Sigma : z = \cos x + \cos y$, $(x, y) \in (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)$, si determinino, in $P_0 : (0,0,2)$ le due forme fondamentali, la curvatura gaussiana nonché la curvatura normale di $\mathscr{C}$: $\begin{cases} z = \cos x + \cos y \\ x - 2y = 0 \end{cases}$ π

$\overset{\shortparallel}{\Sigma \cap \pi}$

② Data $\mathscr{C}$: $\begin{cases} x = \cos\varphi \\ y = \sin\varphi \\ z = f(\varphi) \end{cases}$ $\varphi \in \mathbb{R}$, f liscia

Determinare $f = f(\varphi)$ in modo che $\mathscr{C}$ risulti essere una geodetica del cilindro Σ : $x^2 + y^2 - 1 = 0$

Tempo a disposizione: 1h 30m

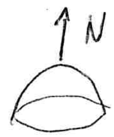
Le risposte vanno adeguatamente giustificate.

Geometria II
7/12/19

① Data Σ : $z = \cos x + \cos y$ $\quad (x,y) \in (-\pi,\pi)\times(-\pi,\pi)$

si determinino, in $P_0: (0,0,2)$

le due forme fondamentali, la curvatura gaussiana e la curvatura normale di $\mathcal{C}$: $\begin{cases} z = \cos x + \cos y \\ x - 2y = 0 \end{cases}$



Sol. rapida $\quad z = 1 - \frac{x^2}{2} + \dots + 1 - \frac{y^2}{2} = 2 - \frac{x^2+y^2}{2} + \dots$

$$= 2 + \frac{1}{2}(x,y)\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \dots$$

$\Rightarrow K = +1$

$(e \ k_1 = k_2 = -1)$
pto ombelicale

curv. normale di $\mathcal{C}$ in $P: (0,0,2)$

$v = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1, 0)$ versore tang a $\mathcal{C}$ in P

$$k_n = (-1)\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} + (-1)\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{3}{\sqrt{5}}$$

Sol. più dettagliata $\quad \Sigma: \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = \cos x + \cos y \end{cases}$

in $P_0: (0,0,2)$

$r: (x, y, \cos x + \cos y)$ $\qquad r_0: (0,0,2)$

$r_x: (1, 0, -\sin x)$ $\qquad r_x^0: (1,0,0)$

$r_y: (0, 1, -\sin y)$ $\qquad r_y^0: (0,1,0)$

I

$E = G = 1$

$F = 0$

$r_{xx}: (0, 0, -\cos x)$ $\qquad r_{xx}^0: (0,0,-1)$

$r_{xy}: (0, 0, 0)$ $\qquad r_{xy}^0: (0,0,0)$

$r_{yy}: (0, 0, -\cos y)$ $\qquad r_{yy}^0: (0,0,-1)$

$N^0 = (0,0,1)$

II

$e = g = -1$

$f = 0$

in P_0

$$K_0 = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{1}{1} = 1$$ ✓

$$H_0 = \frac{1}{2} \, \frac{eG - 2Ff + Eg}{EG - F^2} = \frac{1}{2} \, \frac{\overbrace{-1 - 1}^{-2}}{1} = -1$$

$$k^2 - 2H \cdot k + K = 0$$ curv. principali

$$k^2 + 2k + 1 = 0$$ $k = -1$ doppia

$$(k+1)^2 = 0$$ (pto ombelicale) ✓

② $\mathscr{C}$: $\begin{cases} x = \cos\varphi \\ y = \sin\varphi \\ z = f(\varphi) \end{cases}$ $\qquad \varphi \in \mathbb{R}$

determinare $f = f(\varphi)$ in modo che $\mathscr{C}$ sia una geodetica sul cilindro $\Sigma : x^2+y^2=1$ 

Sol. $\mathscr{C}$ deve essere un'elica cilindrica $\Rightarrow f(\varphi) = b\varphi + c$

Oppure: $\|\dot{\underline{r}}\|^2 = 1 + f'(\varphi)^2 \qquad ' = \frac{d}{d\varphi}$

deve risultare costante ($\mathscr{C}$ è autoparallela)

$\Rightarrow \quad f'(\varphi) = \text{costante}$

$\Rightarrow \quad f(\varphi) = b\varphi + c \qquad b, c \in \mathbb{R}$