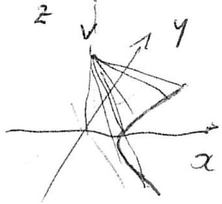
GEOMETRIA II

Prof. M. Spera

Prova scritta del 13 febbraio 2020

① Sia data, nel piano xy, la curva $\mathcal{C}$ di equazione $\begin{cases} x = \cosh s \\ y = \sinh s \end{cases}$ $s \in \mathbb{R}$

(di che cosa si tratta?). Determinare la superficie $\mathcal{R}$ individuata dalle rette che congiungono $V: (0,0,1)$ ai punti di $\mathcal{C}$. Dimostrare che $\mathcal{R}$ è una rigata sviluppabile



② Nella porzione di piano $(0,\frac{\pi}{2}) \times (0,\frac{\pi}{2})$

sia data la metrica $ds^2 = \sin^2 x\, dx^2 + \cos^2 y\, dy^2$.

Calcolarne la relativa curvatura gaussiana e determinarne le geodetiche

Tempo a disposizione: 1h 30m

Le risposte vanno adeguatamente giustificate.

Geo II 13/2/20

(1) $\mathcal{C}$ è un ramo di iperbole equilatera $x^2-y^2=1$

$(ch^2 - sh^2 = 1)$

$\mathcal{R}$ è un cono di vertice V; il piano tangente non varia lungo le generatrici

$\Rightarrow$ $\mathcal{R}$ è sviluppabile (quindi $K=0$)

sia $P: (\cosh s, \sinh s; 0)$; $V: (0,0,1)$

retta PV:
$$\begin{cases} x = 0 + t.\cosh s & = t\cosh s \\ y = 0 + t.\sinh s & = t\sinh s \\ z = 1 - t & = 1-t \end{cases}$$

$t=0$: V
$t=1$: P

$$\mathcal{R}: \begin{cases} x = t\cosh s \\ y = t\sinh s \\ z = 1-t \end{cases}$$

$$\underline{r} = (t\cosh s, t\sinh s, 1-t)$$
$$\underline{r}_s = (t\sinh s, t\cosh s, 0)$$
$$\underline{r}_t = (\cosh s, \sinh s, -1)$$

$$\underline{r}_s \times \underline{r}_t = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ t\sinh s & t\cosh s & 0 \\ \cosh s & \sinh s & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \underline{i}(-t\cosh s) - \underline{j}(-t\sinh s) + \underline{k}\, t(\sinh^2 s - \cosh^2 s)$$

α $(\cosh s, \sinh s, 1)$ $\Rightarrow$ il piano tangente non varia risp. a t

②
$$ds^2 = \sin^2 x \, dx^2 + \cos^2 y \, dy^2$$
$$= (-d\cos x)^2 + (d\sin y)^2$$
$$= (\underbrace{d\cos x}_{\xi})^2 + (\underbrace{d\sin y}_{\eta})^2$$
$$= d\xi^2 + d\eta^2$$

$\Rightarrow K = 0$ ✓ geodätische: $a\xi + b\eta + c = 0$

$(a,b) \neq (0,0)$

$$a\cos x + b\sin y + c = 0$$