GEOMETRIA II

Prof. M. Spera

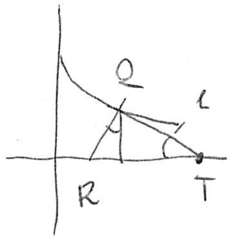
Prova scritta dell' 11 luglio 2019

1) Sia data la famiglia di curve

$$\mathcal{C}_c = \begin{cases} x^2+y^2+z^2-1=0 \\ z=c \end{cases} \qquad c \in (-1,1)$$

(di che cosa si tratta?)

Calcolarne la curvatura geodetica e, in più modi, la curvatura normale. Si verifichi che quest'ultima è costante.

2) 

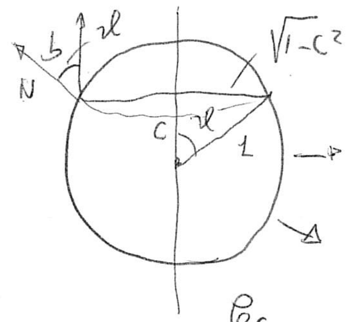
Sulla pseudosfera di Beltrami, si determini per via geometrica la curvatura geodetica di un generico parallelo e si dimostri che è costante.

Sugg. Si calcoli la curvatura normale...

Tempo a disposizione: 1h 30m

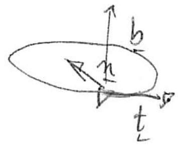
Le risposte vanno adeguatamente giustificate

(1)



$$\mathscr{C}_c : \begin{cases} x^2+y^2+z^2-1=0 \\ z=c \end{cases}$$

Calcolare $k^{\mathscr{C}_c}$.



$\underline{b} = (0,0,1)$

$\underline{N} = \frac{1}{r}(x_0, y_0, z_0)$

$= (x_0, y_0, z_0)$, $z_0 = c$

$$k^{\mathscr{C}_c} = \frac{1}{\sqrt{1-c^2}} \qquad \langle \underline{b}, \underline{N} \rangle = z_0 = c$$

$$k_g^{\mathscr{C}_c} = \frac{c}{\sqrt{1-c^2}}$$

$\mathscr{C}_c$ è una geodetica $\iff$ $c = 0$ (chiaro)

$$k_n^{\mathscr{C}_g} = -1$$

chiaro dal teor di gran normale

$$\left(k_g^2 + k_n^2 = \frac{c^2}{1-c^2} + 1 = \frac{c^2+1-c^2}{1-c^2} = \frac{1}{1-c^2} = k^2 \quad \checkmark \right)$$

Controllo ulteriore

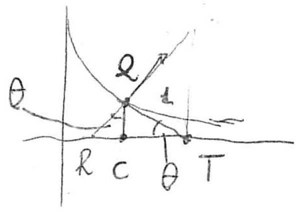
$\underline{n} = \frac{1}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}(-x_0, -y_0, 0)$ $\quad \underline{N} = (x_0, y_0, z_0)$

in $\underline{P}: (x_0, y_0, z_0)$, $z_0 = c$

$$\langle \underline{n}, \underline{N} \rangle = -\frac{x_0^2+y_0^2}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}} = -\sqrt{x_0^2+y_0^2} = -\sqrt{1-c^2}$$

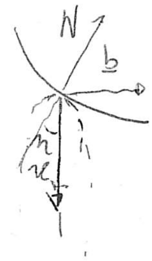
$$k_n = k \langle n, N \rangle = -\frac{1}{\sqrt{1-c^2}} \cdot \sqrt{1-c^2} = -1 \quad \checkmark$$

②



Calcolare per via geometrica la curvatura geodetica di un generico parallelo sulla pseudosfera di Beltrami e verificare che è costante

Curvatura normale



$$k_n = -\frac{1}{QR} = -\frac{1}{QC}\cdot\cos\nu$$

$$k = \frac{1}{QC}$$

$$k_g^2 = \overbrace{\frac{1}{QC^2}}^{k^2} - \overbrace{\frac{1}{QC^2}\cos^2\nu}^{k_n^2} = \frac{\sin^2\nu}{QC^2} = \frac{QC^2}{QC^2} = 1$$

$k_g = \pm 1$ a seconda dell'orientamento del parallelo