GEOMETRIA II

Prof. M. Spera   UCSC, Brescia

Prova scritta del 12 giugno 2014

(1) Data la superficie $\Sigma: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$ (cos'è?) se ne determinino, in $P_0: (0,0,1)$ e tramite il calcolo implicito, la 1^a e la 2^a forma fondamentale, nonché la curvatura gaussiana.

(2) Data $\mathcal{C}: \begin{cases} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1 & \Sigma \\ x + y = 0 & \pi \end{cases}$

Dopo aver verificato che si tratta di una curva regolare (cos'è?) determinarne, possibilmente in più modi, la curvatura (spaziale) in $P_0: (0,0,1)$

[sugg: $k = |k_n|$; si utilizzi, per il metodo standard, la parametrizzazione $\underline{x} = \underline{x}(s)$ per $\mathcal{C}$, assieme al calcolo implicito].

Tempo a disposizione: 1h 30m.

Le risposte vanno adeguatamente giustificate.

(1) $\Sigma: \quad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$ (ellissoide triassiale)

$P_0: (0,0,1) \in \Sigma$ loc: $z = \varphi(x,y)$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \varphi^2 = 1$$

$\boxed{\varphi^0 = 1}$ $x_0 = y_0 = 0,\ z_0 = 1$

$\frac{\partial}{\partial x}$ $\quad \frac{\cancel{2}x}{9} + \cancel{2}\varphi\varphi_x = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varphi^0_x = 0}$

$\frac{\partial}{\partial y}$ $\quad \frac{\cancel{2}y}{4} + \cancel{2}\varphi\varphi_y = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varphi^0_y = 0}$

$\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ $\quad \frac{1}{9} + \varphi_x^2 + \varphi\varphi_{xx} = 0 \qquad \frac{1}{9} + 0 + 1\cdot\varphi^0_{xx} = 0$

$\boxed{\varphi^0_{xx} = -\frac{1}{9}}$

$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$ $\quad \varphi_y\varphi_x + \varphi\varphi_{xy} = 0 \qquad \boxed{\varphi^0_{xy} = 0}$

$\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ $\quad \frac{1}{4} + \varphi_y^2 + \varphi\varphi_{yy} = 0 \qquad \frac{1}{4} + \varphi^0_{yy} = 0 \qquad \boxed{\varphi^0_{yy} = -\frac{1}{4}}$

$z = \varphi(x,y) \qquad \underline{r}(x,y) = (x, y, \varphi(x,y))$

$\underline{r}_x = (1, 0, \varphi_x) \qquad \underline{r}_x \times \underline{r}_y = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 0 & \varphi_x \\ 0 & 1 & \varphi_y \end{vmatrix} =$

$\underline{r}_y = (0, 1, \varphi_y)$

$\underline{r}_{xx} = (0, 0, \varphi_{xx}) \qquad = -\underline{i}\,\varphi_x - \underline{j}\,\varphi_y + \underline{k}$

$\underline{r}_{xy} = (0, 0, \varphi_{xy}) \qquad \underline{N} = \frac{\underline{r}_x \times \underline{r}_y}{\| \quad \|} = \left(\frac{-\varphi_x}{\sqrt{1+\varphi_x^2+\varphi_y^2}}, \frac{-\varphi_y}{\sqrt{\ }}, \frac{1}{\sqrt{\ }} \right)$

$\underline{r}_{yy} = (0, 0, \varphi_{yy})$

in $P_0: (0,0,1)$ è $\underline{N}^0 = (0, 0, 1)$ (chiaro a priori)

I forma fondamentale

$$E_0 = \|\underline{r}_x^0\|^2 = 1 = G_0 = \|\underline{r}_y^0\|^2$$

$$F_0 = \langle \underline{r}_x^0, \underline{r}_y^0 \rangle = 0 \qquad \text{(chiaro...)}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} E_0 = 1 \\ G_0 = 1 \\ F_0 = 0 \end{array}}$$

II forma fond.

$$e_0 = \langle \underline{N}^0, r_{xx}^0 \rangle = \varphi_{xx}^0 = -\frac{1}{9}$$

$$f_0 = \langle \underline{N}^0, r_{xy}^0 \rangle = \varphi_{xy}^0 = 0$$

$$g_0 = \langle \underline{N}^0, r_{yy}^0 \rangle = \varphi_{yy}^0 = -\frac{1}{4}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} e_0 = -\frac{1}{9} \\ f_0 = 0 \\ g_0 = -\frac{1}{4} \end{array}}$$

$$K_0 = \frac{e_0 g_0 - f_0^2}{E_0 G_0 - F_0^2} = \left(-\frac{1}{9}\right)\left(-\frac{1}{4}\right) = +\frac{1}{36}$$

Geometria II
30/1/14

(2) $\mathscr{C}: \begin{cases} \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} + z^2 = 1 \\ x + y = 0 \end{cases}$

Curvatura di $\mathscr{C}$ in più modi, nel pto $P_0:(0,0,1)$

1° $k = |k_n|$, curvatura normale di $\mathscr{C}$, comune alle curve su Σ aventi la stessa tangente in P_0 (Meusnier);

tale tangente ha direzione indiv. da $v = (1, -1, 0)$

$$k_n = \frac{\mathrm{II}(v)}{\|v\|^2} = \frac{-\frac{1}{9}\cdot 1 - \frac{1}{4}\cdot 1}{1+1} = \quad = r_x^0 - r_y^0$$

si ricordi:
$v = \alpha r_u + \beta r_v$

$$\boxed{k_n = \frac{\alpha^2 e + 2\alpha\beta f + \beta^2 g}{\alpha^2 E + 2\alpha\beta F + \beta^2 G}}$$

$$= \frac{-\frac{1}{9} - \frac{1}{4}}{2} = \frac{-4-9}{72} = -\frac{13}{72}$$

$$\boxed{k = \frac{13}{72}}$$

2° standard: par. con s

$\mathscr{C}: \quad \underline{r} = \underline{r}(s) \qquad k(s) = \|r''(s)\|$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2(s)}{9} + \dfrac{y^2(s)}{4} + z^2(s) \equiv 1 \\ x(s) + y(s) = 0 \end{cases}$$

$x' + y' = 0 \qquad x'' + y'' = 0$

$$\frac{2xx'}{9} + \frac{2yy'}{4} + 2zz' = 0$$

$$\frac{x'^2}{9} + \frac{xx''}{9} + \frac{y'^2 + yy''}{4} + z'^2 + zz'' = 0$$

Si ricordi altresì che

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$$

$$\Rightarrow \quad \cancel{2}x'x'' + \cancel{2}y'y'' + \cancel{2}z'z'' = 0$$

poniamoci in $P_0:(0,0,1)$

viene $z' = 0 \qquad x'^2 + y'^2 = 1$

$x' + y' = 0 \Rightarrow$ ad es.

$x' = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad y' = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

Si ha poi: $x'' + y'' = 0$

$$\frac{\frac{1}{2}}{9} + \frac{\frac{1}{2}}{4} + 1\cdot z'' = 0$$

$$\frac{1}{18} + \frac{1}{8} + z'' = 0 \qquad z'' = -\frac{4+9}{72} = -\frac{13}{72}$$

v. oltre

$$x'' + y'' = 0$$

$$\cancel{\tfrac{1}{\sqrt{2}}}\, x'' - \cancel{\tfrac{1}{\sqrt{2}}}\, y'' = 0$$

$$\Rightarrow \quad x'' = y'' = 0$$

$$\Rightarrow \quad \underline{r}'' = \left(0,\ 0,\ -\frac{13}{72}\right)$$

... prevedibile

$$\Rightarrow \quad k(P_0) = \frac{13}{72} \qquad \checkmark$$

— . — . —

regolarità di $\mathcal{C}$

$$f = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + z^2 - 1 = 0$$

$$g = x + y = 0$$

$$\nabla f = \left(\frac{2x}{9},\ \frac{y}{2},\ 2z \right)$$

$$\nabla g = (1,\ 1,\ 0)$$

$$\nabla f \times \nabla g = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \frac{2}{9}x & \frac{y}{2} & 2z \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \underline{i}\,(-2z) - \underline{j}\,(-2z) + \underline{k}\left(\frac{2}{9}x - \frac{y}{2}\right) = 0$$

$\Rightarrow \quad z = 0 \qquad \frac{2}{9}x - \frac{y}{2} = 0$, ed è anche $x + y = 0$

$\Rightarrow \quad x = y = z = 0$. Ma $O: (0,0,0) \notin \mathcal{C}$.