GEOMETRIA II

Prof. M. Spera UCSC, Bresaia

Prova scritta del 19/12/2015

① Sia data Σ : $\underline{r}(u,v) = (u(1-v),\ u^2(1-v)+v,\ v)$ $u, v \in \mathbb{R}$, $v < 1$

Si verifichi che si tratta di una rigata sviluppabile, mostrando che il piano tangente non varia lungo i regoli. Di che cosa si tratta?

② Data Σ : $z = x^2 - 5 \sinh^2 y$

nel punto $P_0 : (0,0,0)$ $(\in \Sigma)$ determinare la curvatura gaussiana, media e le curvature principali.

Dato poi $\pi : x - y = 0$, calcolare, in P_0, la curvatura normale di $\mathscr{C} = \Sigma \cap \pi$.

③ fac. Risolvere l'es. ① attraverso il calcolo della prima e seconda forma fondamentale.

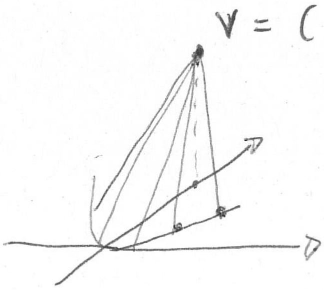
Tempo a disposizione: 1h 30m

Le risposte vanno adeguatamente giustificate.

(1) $\Sigma: \underline{r} = \underline{r}(u,v) = \left(u(1-v),\ u^2(1-v)+v,\ v\right)$, $\quad v<1$

(5)

Geometria II



verificare che si tratta di una rigata sviluppabile, in più modi (cos'è?)

Sol. fissando u, si ottiene una retta

Σ è una rigata di direttrice $\underline{c} = (u, u^2, 0)$

Tutte le rette passano per $V = (0,1,1)$ (si ponga u qualsiasi e $v=1$)

Dunque è un cono di vertice V ed è sviluppabile.

piano tangente in un punto generico P_0

(Σ è regolare...)

$$\underline{r}_u = (1-v,\ 2u(1-v),\ 0)$$

$$\underline{r}_v = (-u,\ -u^2,\ 1)$$

$$\underline{r}_{uu} = (0,\ 2(1-v),\ 0)$$

$$\underline{r}_{vv} = (0,\ 0,\ 0)$$

$$\underline{r}_{uv} = (-1,\ -2u,\ 0)$$

$$(1-v)\begin{pmatrix} u \\ u^2 \\ 0 \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-v)u \\ (1-v)u^2+v \\ v \end{pmatrix}$$

$$\underline{r}_u \times \underline{r}_v = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1-v & 2u(1-v) & 0 \\ -u & -u^2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\underline{i}\left\{2u(1-v)\right\} - \underline{j}(1-v) + \underline{k}\underbrace{\left\{-(1-v)u^2 - 2u^2\cdot(1-v)\right\}}_{(1-v)\left[\underbrace{-u^2-2u^2}_{-3u^2}\right]}$$

$$\underline{r}_u \times \underline{r}_v = (1-v)\left\{ 2u\, \underline{i} - \underline{j} \quad - 3u^2 \underline{k} \right\}$$

Da ciò si evince subito che il piano tangente non varia lungo una generatrice: fissato u, $\underline{N} = \frac{\underline{r}_u \times \underline{r}_v}{\| \quad \|}$ rimane costante. Dunque Σ è sviluppabile, ed è un cono di vertice V.

(3) Calcoliamo comunque K in modo standard (con la 2ª forma fond.)

$$\|\underline{r}_u \times \underline{r}_v\| = (1-v)\sqrt{4u^2 + 1 + 9u^4}$$

di fatto non ci servirà per calcolare K

$$\left.\begin{aligned} E &= (1-v)^2(1+4u^2) \\ F &= -u(1-v) - 2u^3(1-v) = \\ &= (1-v)(-u-2u^3) \\ G &= u^4+u^2+1 \end{aligned}\right\}$$

anche questo non servirà per calcolare K

$$\begin{aligned} e &= \langle \underline{r}_{uu}, \underline{N}\rangle \propto -2(1-v) \\ f &\propto -2u + 2u = 0 \\ g &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow K = 0$$

Geometria II

(2) $\Sigma : \quad z = \overbrace{x^2 - 5\sinh^2 y}^{f}$

$P_0 : (0,0,0) \qquad (0,0)$ critico per $z = f(x,y)$

$$z = x^2 - 5\left(y + \frac{y^3}{6} + ..\right)^2 = \underbrace{x^2 - 5y^2}_{\frac{1}{2}(x \;\; y)\, \underbrace{\mathcal{H}_f(0,0)}_{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -10 \end{pmatrix}} \binom{x}{y}} + \dots$$

$$K_0 = 2 \cdot (-10) = -20$$

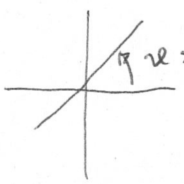
$\pi : \; x - y = 0 \qquad \underline{r} = \underline{r}(x,y) = (x, y, x^2 - 5\sinh^2 y)$

Curvatura normale della curva

$\mathscr{C} = \Sigma \cap \pi$

in P_0.

1 : Eulero $\quad k_n = k_1 \cos^2\vartheta + k_2 \sin^2\vartheta$



$$= 2 \cdot \frac{1}{2} - 10 \cdot \frac{1}{2}$$

$$= 1 - 5 = -4$$

2 : $\quad k_n = \dfrac{e\dot{u}^2 + 2f\dot{u}\dot{v} + g\dot{v}^2}{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2}$

$(\dot{u} = \dot{v} = 1)$

$$\| $$

$$\frac{2 \cdot 1 - 10 \cdot 1}{1 + 1}$$

$$= \frac{2 - 10}{2} = \frac{-8}{2} = -4 \quad \checkmark$$

calcoli più dettagliati

$\underline{r}_0 : (0,0,0)$

$\underline{r}_x^0 = (1,0,0)$

$\underline{r}_y^0 = (0,1,0)$

$\underline{r}_{xx}^0 = (0,0,2)$

$\underline{r}_{xy}^0 = (0,0,0)$

$\underline{r}_{yy}^0 = (0,0,-10) \quad (+)$

$\underline{N}^0 = (0,0,1)$

$E_0 = G_0 = 1, \quad F_0 = 0$

$e_0 = 2, \; f_0 = 0, \; g_0 = -10$

$$H_0 = \frac{1}{2}\,\frac{eG - 2fF + Eg}{EG - F^2}$$

$$= \frac{1}{2}(2 - 10)$$

$$= \frac{1}{2}(-8) = -4$$

$$K_0 = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = -20$$

$k_1 = 2, \quad k_2 = -10$

(+) ulteriore controllo:

$$\boxed{\begin{aligned} & x^2 - 5\sinh^2 y \xmapsto{\partial/\partial y} -10\,\mathrm{sh}y\,\mathrm{ch}y \\ & \xmapsto{\partial/\partial y} -10\{\mathrm{ch}^2 y + \mathrm{sh}^2 y\} \\ & \Rightarrow \big|_0 = -10 \end{aligned}}$$