GEOMETRIA II

Prof. M. Spera, UCSC Brescia

Prova scritta del 23 luglio 2014

① Determinare in più modi l'evoluta di $\mathcal{C}: \ \underline{r}(t) = (t, e^t)$. Scrivere altresì l'equazione del cerchio osculatore corrispondente al valore $t=0$ (ev. in più modi)

② Data $(\mathbb{R}^2, ds^2 = dx^2 + e^{2y} dy^2)$ se ne calcoli la curvatura gaussiana e se ne determinino le geodetiche in più modi.

Tempo a disposizione: 1h 30m

Le risposte vanno adeguatamente giustificate

① Evoluta di $\mathcal{C}$: $y = e^x$

inviluppo delle normali

$\underline{r} = (t, e^t)$

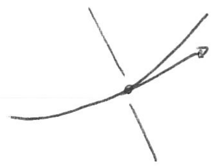
$\dot{\underline{r}} = (1, e^t)$

$\ddot{\underline{r}} = (0, e^t)$

$\mathcal{C}$: $\underline{r}(t) = (t, e^t)$

normale a $\mathcal{C}$ in $\underline{r}(t)$: $\langle \underline{r} - \underline{r}(t), \dot{\underline{r}}(t) \rangle = 0$

$$(x-t)\cdot 1 + (y - e^t)\cdot e^t = 0$$



$f(x,y,t)=0$, $\dfrac{\partial f}{\partial t} = 0$

$$\begin{cases} x + e^t y - t - e^{2t} = 0 \\ e^t y - 1 - 2e^{2t} = 0 \end{cases}$$

$e^t y = 1 + 2e^{2t}$

$$\Rightarrow \quad y = (1 + 2e^{2t}) e^{-t}$$

$$x + e^t \left\{ e^{-t}(1 + 2e^{2t}) \right\} - t - e^{2t} = 0$$

$$x + 1 + 2e^{2t} - t - e^{2t} = 0$$

$$x = t - 1 - e^{2t}$$

$$\mathcal{E}: \begin{cases} x = t - 1 - e^{2t} \\ y = (1 + 2e^{2t}) e^{-t} = e^{-t} + 2e^t \end{cases}$$

$t = 0$

$x = -1 - 1 = -2$

$y = 1 + 2 = 3$

$\boxed{\text{cerchio osculatore per } t = 0}$ $\quad C: (-2, 3)$

$P = (0, 1)$ $\quad \rho = \overline{CP} = \sqrt{(-2)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{4+4}$

$= \sqrt{8} = 2^{3/2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{(x+2)^2 + (y-3)^2 = 8}$

Determiniamo l'evoluta in altro modo (standard)

$$C = P + \frac{\|\dot{P}\|^2}{\langle i\dot{P}, \ddot{P}\rangle} \, i\dot{P}$$

$$P = \underline{r} = (t, e^t)$$
$$\dot{P} = (1, e^t)$$
$$i\dot{P} = (-e^t, 1)$$
$$\ddot{P} = (0, e^t)$$

$$\langle i\dot{P}, \ddot{P}\rangle = e^t$$

$$\|\dot{P}\|^2 = 1 + e^{2t}$$

$$C = \begin{pmatrix} t \\ e^t \end{pmatrix} + \frac{1+e^{2t}}{e^t} \begin{pmatrix} -e^t \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{E} : \begin{cases} x = t + \frac{1+e^{2t}}{e^t}(-e^t) = t - 1 - e^{2t} \\ y = e^t + \frac{1+e^{2t}}{e^t} 1 = e^t + e^{-t} + e^t \end{cases}$$

$$= 2e^t + e^{-t}$$
$$= e^{-t}(1 + 2e^{2t})$$

controlliamo il <u>cerchio osculatore</u>

$$k = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{3/2}} = \frac{1 \cdot e^t}{(1+e^{2t})^{3/2}}$$

$$t=0 : \; k = \frac{1}{2^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \rho = 2^{\frac{3}{2}}$$

② $\left(\mathbb{R}^2,\ ds^2 = dx^2 + e^{2y}dy^2\right)$

geodetiche in due modi.

1. se $\xi := e^y$ è $d\xi = e^y dy$

$$d\xi^2 = e^{2y}dy^2$$

$\leadsto$ $ds^2 = dx^2 + d\xi^2$ metrica standard su (x,ξ)

$\Rightarrow$ geodetiche = rette di (x,ξ)

$$ax + b\xi + c = 0 \qquad (a,b) \neq (0,0)$$

$$ax + be^y + c = 0$$

2. $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(x'^2 + e^{2y}y'^2)$

manca x $\Rightarrow$ $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'} = x' = c$ $\Rightarrow$ $\boxed{x(s) = cs + d}$ $(*)$

Cons. dell'energia: $x'^2 + e^{2y}y'^2 = 1$

$$\Rightarrow \quad e^{2y}y'^2 = A > 0$$

$$y' = \tilde{A}e^{-y} \qquad \tilde{A} \in \mathbb{R}$$

$$e^y dy = \tilde{A}\, ds$$

$$de^y = \tilde{A}\, ds \qquad \boxed{e^y = \tilde{A}s + \tilde{C}} \ (**)$$

(in modo che $\int$ risulti >0)

$\Rightarrow$ si ritrova la sol. iniziale eliminando s dalle $(*)$ e $(**)$ $\triangleright$