GEOMETRIA II

Prof. M. Spera UCSC, Brescia

Prova scritta del 26 giugno 2014

(1) Si consideri $\mathcal{C}: \begin{cases} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1 & \Sigma \\ x+y=0 & \pi \end{cases}$

($\mathcal{C}$ è una curva regolare: verificarlo). Si calcoli la curvatura geodetica di $\mathcal{C}$ (come curva di $\Sigma$) in $P_0: \left(\frac{6}{\sqrt{13}}, -\frac{6}{\sqrt{13}}, 0\right)$. $\mathcal{C}$ è una geodetica su $\Sigma$? E su $\pi$?

[Sugg. utilizzare il calcolo complicato]

(2) Sia $\Sigma$: $\underline{x}(x,t) = (tx, t(\cos x - 1)+1, 1-t)$, $t \in (0,1)$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Dimostrare, in più modi, che $\Sigma$ è una rigata sviluppabile (cos'è?)

Tempo a disposizione: 1h 30m.

Le risposte vanno adeguatamente giustificate.

Geometria II

(1) $\mathcal{C}: \begin{cases} \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}+z^2=1 & \tau \\ x+y=0 & \pi \end{cases}$

Intersechiamo $\mathcal{C}$ con $z=0$. Si ha:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1 \\ x+y=0 \end{cases} \qquad \frac{x^2}{9}+\frac{x^2}{4}=1$$

$$x^2\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{4}\right)=1$$

$$x^2\,\frac{4+9}{36} = x^2\,\frac{13}{36}=1 \qquad x^2=\frac{36}{13} \qquad x=\pm\frac{6}{\sqrt{13}}$$

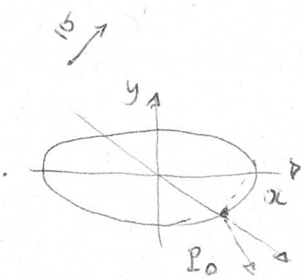
$$\Rightarrow \quad P=\left(\pm\frac{6}{\sqrt{13}},\ \mp\frac{6}{\sqrt{13}},\ 0\right)$$

Calcoliamo Tg in $P_0$: $\left(\frac{6}{\sqrt{13}},\ -\frac{6}{\sqrt{13}},\ 0\right)$

troviamo $\underline{N}=\pm\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$ $\qquad f=\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}+z^2-1$ $\qquad$ orientiamo con la normale esterna

$$\nabla f = \left(\frac{2x}{9},\ \frac{y}{2},\ 2z\right)$$

$$\nabla f(P_0)=\left(\frac{2}{\cancel{9}_3}\,\frac{\cancel{6}^{2}}{\sqrt{13}},\ \frac{-\cancel{6}^{3}}{\cancel{2}\sqrt{13}},\ 0\right)=\left(\frac{4}{3\sqrt{13}},\ -\frac{3}{\sqrt{13}},\ 0\right) \quad (\text{ok})$$




$$\|\nabla f(P_0)\|=\sqrt{\frac{16}{13\cdot 9}+\frac{9}{13}}=\sqrt{\frac{16+81}{13\cdot 9}}$$

$$=\sqrt{\frac{97}{13\cdot 9}}=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{97}{13}}$$

$$\underline{N}(P_0) = \left( \frac{4}{3\sqrt{13}} \cdot 3\sqrt{\frac{13}{97}} \,,\; -\frac{3}{\sqrt{13}} \cdot 3\sqrt{\frac{13}{97}} \,,\; 0 \right)$$

$$= \left( \frac{4}{\sqrt{97}} \,,\; \frac{-9}{\sqrt{97}} \,,\; 0 \right)$$

controllo: $16 + 81 = 97$ ✓

orientiamo la curva in modo che $\underline{b} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$

$(\perp \pi)$ sia il suo versore binormale.

Calcoliamo la curvatura di $\mathscr{C}$ in $P_0$: $\left(\frac{6}{\sqrt{13}}, -\frac{6}{\sqrt{13}}, 0\right)$

$$r = \underline{r}(s)$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + z^2 - 1 = 0$$

$$\frac{2xx'}{9} + \frac{yy'}{2} + 2zz' = 0$$

$$\frac{2}{9}(x'^2 + xx'') + \frac{1}{2}(y'^2 + yy'') + 2(z'^2 + zz'') = 0$$

Si ricordi

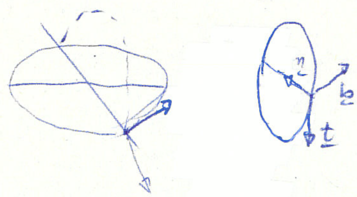
$$x + y = 0$$
$$x' + y' = 0$$
$$x'' + y'' = 0$$

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$$
$$x'x'' + y'y'' + z'z'' = 0$$

troviamo, successivamente, in $P_0$,

$$\frac{2}{9}\frac{6}{\sqrt{13}}x' - \frac{6}{2\sqrt{13}}y' = 0$$
$$x' + y' = 0$$

$$\Rightarrow x' = y' = 0 \Rightarrow z' = \pm 1$$




☆ si deve scegliere, in base alla scelta di $\underline{b}$,

$z' = -1$ : $\underline{t}: (0, 0, -1)$

$$\begin{cases} x'' + y'' = 0 \\ \frac{2}{\cancel{9}_{3}} \frac{\cancel{6}^{2}}{\sqrt{13}} x'' + \frac{1}{\cancel{2}} \left( - \frac{\cancel{6}^{3}}{\sqrt{13}} y'' \right) + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'' + y'' = 0 \\ \frac{4}{3\sqrt{13}} x'' - \frac{3}{\sqrt{13}} y'' + 2 = 0 \end{cases} \qquad y'' = -x'' \qquad \Rightarrow \quad \left( \frac{4}{3\sqrt{13}} + \frac{3}{\sqrt{13}} \right) x'' + 2 = 0$$

$$\left( \frac{\overbrace{4 + 9}^{13}}{3\sqrt{13}} \right) x'' + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{13}}{3} x'' + 2 = 0$$

$$x'' = - \frac{2 \cdot 3}{\sqrt{13}} = - \frac{6}{\sqrt{13}} \qquad y'' = \frac{6}{\sqrt{13}}$$

È poi $z'' = 0 \Rightarrow \boxed{\underline{r}_0'' = \left( - \frac{6}{\sqrt{13}}, + \frac{6}{\sqrt{13}}, 0 \right)}$

ragionevole...

$\underline{N}_0 : \left( \frac{4}{\sqrt{97}}, - \frac{9}{\sqrt{97}}, 0 \right)$

$\underline{b}_0 : \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)$

$$\Rightarrow \kappa(\ell_0) = \| \underline{r}''(\ell_0) \| = \sqrt{2 \cdot \frac{36}{13}} = 6 \sqrt{\frac{2}{13}}$$

$$\kappa_g(\ell_0) = \kappa(\ell_0) \underbrace{\langle \underline{b}(\ell_0), \underline{N}(\ell_0) \rangle}_{\frac{4}{\sqrt{97}\sqrt{2}} - \frac{9}{\sqrt{97}\sqrt{2}} = - \frac{5}{\sqrt{97 \cdot 2}}} = 6 \sqrt{\frac{2}{13}} \cdot \frac{(-5)}{\sqrt{97}\sqrt{2}} = \frac{-30}{\sqrt{13}\sqrt{97}} < 0$$

ragionevole!

$\Rightarrow \mathcal{C}$ non è una geodetica su $\Sigma$

$\mathcal{C}$ non è geodetica su $\pi$ poichè non è una retta.

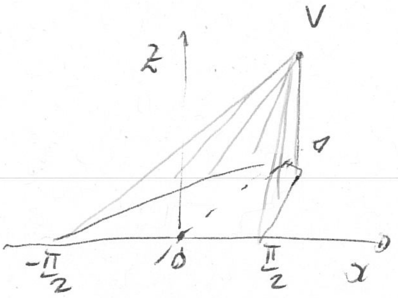
2

$\Sigma$ : $\underline{r}(x,t) = (tx\,,\ t\cos x + 1 - t\,,\ 1-t)$
$= (tx\,,\ t(\cos x - 1) + 1\,,\ 1-t)$

$V:(0,1,1)$

$t\begin{pmatrix} x \\ \cos x \\ 0 \end{pmatrix} + (1-t)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$t \in (0,1)\ ,\ x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$




$\Sigma$ è una rigata (si fissi $x$...) tutti i regoli passano per $V = (0,1,1)$ (si ponga $t=0$). Dunque $\Sigma$ è un <u>cono</u> di vertice $V$ e direttrice $\underline{r}(x) = (x, \cos x, 0)$
$= \underline{r}(x,1)$

$\Sigma$ è pertanto una rigata <u>sviluppabile</u>. Verifichiamolo tuttavia in due modi.

1° Calcoliamo $K$ (dobbiamo trovare $K=0$)

$\underline{r}(x,t) = (tx\,,\ t(\cos x - 1) + 1\,,\ 1-t)$

$\underline{r}_x = (t\,,\ -t\sin x\,,\ 0)$

$\underline{r}_t = (x\,,\ \cos x - 1\,,\ -1)$

$\underline{r}_{xx} = (0\,,\ -t\cos x\,,\ 0)$

$\underline{r}_{xt} = (1\,,\ -\sin x\,,\ 0)$

$\underline{r}_{tt} = (0\,,\ 0\,,\ 0)$

$$\underline{r}_x \times \underline{r}_t = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ t & -t\sin x & 0 \\ x & \cos x - 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$= \underline{i}\,(t\sin x) - \underline{j}\,(-t) + \underline{k}\,\{t(\cos x - 1) + t x \sin x\}$

$= \underline{i}\,(t\sin x) + \underline{j}\,t + \underline{k}\ t\{\cos x - 1 + x\sin x\}$

$$\underline{N} = \left(\frac{t\sin x}{\sqrt{\ }}\,,\ \frac{t}{\sqrt{\ }}\,,\ \frac{t\,[\cos x - 1 + x\sin x]}{\sqrt{\ }}\right)$$

Calcoliamo la 2ª forma fondamentale:

$$e = \langle \underline{r}_{\alpha\alpha}, \underline{N} \rangle = \frac{-t^2 \cos\alpha}{V}$$

$$f = \langle \underline{r}_{\alpha t}, \underline{N} \rangle = \frac{t \sin\alpha}{V} - \frac{t \sin\alpha}{V} = 0$$

$$g = \langle \underline{r}_{tt}, \underline{N} \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad eg - f^2 = 0$$

$\Rightarrow \quad K \equiv 0$

⟨2°⟩ Poniamoci su una generatrice: il piano tangente non dovrà dipendere da $t$.
Ma ciò è chiaro dall'espressione di $\underline{r}_\alpha \times \underline{r}_t$ (e $\underline{N}$): la direzione di $\underline{r}_\alpha \times \underline{r}_t$ non varia rispetto a $t$ (e $\underline{N}$ è costante). Ma tale direzione è per l'appunto ortogonale alla giacitura del piano tangente.