GEOMETRIA II

Prof. M. Spera UCSC, Brescia

Prova scritta del 29/1/2015

(1) Si consideri la superficie $\Sigma : x^2+y^2-z^2-1=0$ (cos'è?), orientata tramite la normale "esterna". Si determini la curvatura normale del generico parallelo $\Sigma \cap \{z=\lambda\}$.

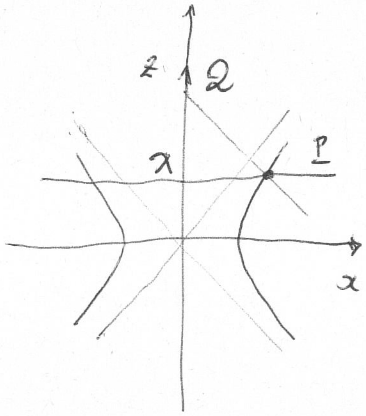
(2) Si determini la curvatura gaussiana di Σ (la si determini lungo un generico parallelo). Quali paralleli risultano essere geodetiche di Σ ?

Tempo a disposizione: 1h 30m

Le risposte vanno adeguatamente giustificate

(1) (2) $\Sigma: \quad x^2+y^2-z^2-1=0$

Curvatura normale di $z=\lambda$



Consideriamo il meridiano

$$\begin{cases} x^2-z^2-1=0 \\ y=0 \end{cases}$$

$z=\lambda$ porge $\quad x^2=\lambda^2+1 \Rightarrow x=\pm\sqrt{\lambda^2+1}$

scegliamo $+$ (non si perde in generalità)

$x=\sqrt{\lambda^2+1}$ $\qquad \boxed{P:\ (\sqrt{\lambda^2+1},\ \lambda)}$

normale al meridiano in P:

(tangente: $f_x^0(x-x_0)+f_z^0(z-z_0)=0$) $\qquad f(x,z)=x^2-z^2-1=0$

$(\star)\quad f_z^0(x-x_0)-f_x^0(z-z_0)=0$

$f_x=2x \qquad f_x^0=2\sqrt{\lambda^2+1}$

$f_z=-2z \qquad f_z^0=-2\lambda$

$(\star) \rightsquigarrow \quad (-2\lambda)(x-\sqrt{\lambda^2+1})-2\sqrt{\lambda^2+1}\,(z-\lambda)=0$

$$\lambda(x-\sqrt{\lambda^2+1})+\sqrt{\lambda^2+1}\,(z-\lambda)=0$$

intersechiamo con l'asse z (i.e. $x=0$). Risulta

$$-\lambda\cancel{\sqrt{\lambda^2+1}}+\cancel{\sqrt{\lambda^2+1}}\,(z-\lambda)=0$$

$$z-\lambda=\lambda \qquad z=2\lambda$$

$\boxed{Q:\ (0,\ 2\lambda)}$ $\qquad$ distanza $\quad d(P,Q)=\sqrt{\lambda^2+1+\lambda^2}=\sqrt{2\lambda^2+1}$

$d(P,Q)=\sqrt{2\lambda^2+1}$ (gran normale)

Curvatura normale $\boxed{k_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{2\lambda^2+1}}}$ ⚠

k_1: curvatura del meridiano (in E).

$$x^2 - z^2 - 1 = 0 \qquad x = \varphi(z) \qquad ' = \frac{d}{dz}$$

$$k_1 = + \frac{\varphi''}{(1+\varphi'^2)^{3/2}}$$

$$2\varphi\varphi' - 2z = 0$$

$$\boxed{\varphi\varphi' - z = 0}$$

$$\boxed{\varphi'^2 + \varphi''\varphi - 1 = 0}$$

$$\sqrt{\lambda^2+1}\cdot\varphi' - \lambda = 0$$

$$\varphi' = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+1}}$$

$$\frac{\lambda^2}{\lambda^2+1} + \varphi''\cdot\sqrt{\lambda^2+1} - 1 = 0 \qquad \varphi''\sqrt{\lambda^2+1} = 1 - \frac{\lambda^2}{\lambda^2+1} = \frac{\lambda^2+1-\lambda^2}{\lambda^2+1} = \frac{1}{\lambda^2+1}$$

$$\varphi'' = \frac{1}{(\lambda^2+1)^{3/2}}$$

$$k_1 = \frac{\frac{1}{(\lambda^2+1)^{3/2}}}{\left(1+\frac{\lambda^2}{\lambda^2+1}\right)^{3/2}} = \frac{1}{\left[\cancel{(\lambda^2+1)}\,\frac{2\lambda^2+1}{\cancel{\lambda^2+1}}\right]^{3/2}} = (2\lambda^2+1)^{-3/2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} k_1 &= (2\lambda^2+1)^{-3/2} \\ k_2 &= -(2\lambda^2+1)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}}$$

Curvatura gaussiana

$$\boxed{K = k_1 k_2 = -(2\lambda^2+1)^{\overbrace{-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}^{-\frac{4}{2}=-2}} = -(2\lambda^2+1)^{-2}} = -\frac{1}{(2\lambda^2+1)^2}$$

parallelo

geodetica : deve essere $\underline{N} \parallel \underline{n}$ ovvero $\underline{N} \perp \underline{b}$

e ciò si ha solo per $\lambda = 0$