GEOMETRIA II a.a. 2014/15

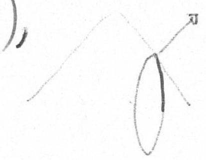
Prof. M. Spera, UCSC-Brescia

Prova scritta del 20/7/2015

(1) Nel piano (x,z) sia data $\mathcal{C}$: $z = (2a-x)x$, $0 < x < 2a$

Si consideri la superficie Σ ottenuta ruotando $\mathcal{C}$ attorno all'asse x. Si determinino le curvature principali di Σ nonché la sua curvatura gaussiana.

(2) Con riferimento all'esercizio 1, si determini a in modo che il parallelo corrispondente a $x = \frac{1}{2}$ sia una geodetica. Si calcoli la curvatura normale di quest'ultimo in generale (per $a > \frac{1}{4}$), possibilmente in due modi.



Tempo a disposizione: 1h 30m

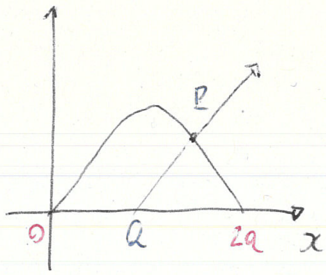
Le risposte vanno adeguatamente giustificate

(1) $z = (2a - x)x \qquad 0 < x < 2a$

$= -x^2 + 2ax$

$z' = -2x + 2a$

$z'' = -2$



$$k_1 = \frac{z''}{(1+z'^2)^{3/2}} = \frac{-2}{\left(1+[2(a-x)]^2\right)^{3/2}}$$

curv. meridiano

$$= \frac{-2}{\left(1+4(a-x)^2\right)^{3/2}}$$

$$k_2 = -\frac{1}{\overline{PQ}}$$

gran normale

$$\begin{cases} z - z_P = -\dfrac{1}{z'_P}(x - x_P) \\ z = 0 \end{cases}$$

normale in P

asse x

$+z_P = +\dfrac{1}{z'_P}(x - x_P)$

$x_Q - x_P = z_P z'_P$

$$\overline{PQ} = \sqrt{(x_Q-x_P)^2+(z_Q-z_P)^2} = \sqrt{z_P^2 z_P'^2 + z_P^2} = \overset{\geq 0}{z_P}\sqrt{1+z_P'^2}$$

$$= z\sqrt{1+4(a-x)^2}$$

$$k_2 = -\frac{1}{\overline{PQ}} = -\frac{1}{(2a-x)x\sqrt{1+4(a-x)^2}}$$

è la curvatura normale del parallelo generico, v. anche es. (2)

$$K = k_1 k_2 = +\frac{1}{(2a-x)x\left(1+4(a-x)^2\right)^2}$$

(in $P = (x, 0, z(x))$ e sul parallelo corrispondente

② Scegliere a in modo che il parallelo corrispondente a $x = \frac{1}{2}$ sia una geodetica

$z = a^2 - (x-a)^2$ Sol. ovviamente, è chiaro che $a = \frac{1}{2}$

$= (a-x+a)(a+x-a)$ analiticamente:

$= (2a-x)x = -x^2+2ax$ $z' = \underset{2(a-x)}{\underset{\parallel}{-2x+2a}} = 0 \Rightarrow x = a = \frac{1}{2}$

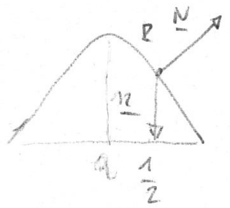
$z = (1-\frac{1}{2})\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$k_n = -4 \quad (= -k)$

Calcoliamola in generale $\frac{1}{2} < 2a \quad a > \frac{1}{4}$

calcolo diretto:

$x = \frac{1}{2} \Rightarrow z = (2a - \frac{1}{2})\frac{1}{2} = a - \frac{1}{4}$



$\boxed{n : (0,0,-1)}$ in $P : (\frac{1}{2}, 0, a-\frac{1}{4})$

$-1/z'$

$N \propto (1, 0, -\frac{1}{2(a-x)})$

$\propto (+2(a-x), 0, -1)$

$$\boxed{N = \frac{1}{\sqrt{\ }}\left(-2(a-\tfrac{1}{2}), 0, +1\right)}$$

(controllo $a < \frac{1}{2}$ $(+,0,+)$ ✓ v. fig.

$$\langle n, N\rangle = -\frac{1}{\sqrt{4(a-\frac{1}{2})^2+1}}$$

$k = z^{-1} = (a-\frac{1}{4})^{-1}$ (controllo: $a = \frac{1}{2} \Rightarrow k = (\frac{1}{2}-\frac{1}{4})^{-1} = (\frac{1}{4})^{-1} = k$ ✓

$$k_n = \langle N, n\rangle k = -\frac{1}{(a-\frac{1}{4})\sqrt{1+4(a-\frac{1}{2})^2}}$$

(✓ ok il segno)

alternativamente, si poteva utilizzare la formula della curv. normale