GEOMETRIA II

a.a. 2014/15

Prof. M. Spera, UCSC-Brescia

Prova scritta del 24/9/2015

(1) Sia data $\mathcal{C}$: $\underline{r} = \underline{r}(t) = \left((1-t)\cos t, (1-t)\sin t, t \right)$

$t \in (-\infty, 1)$

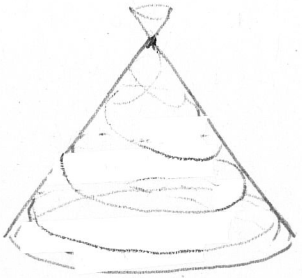
Mostrare che $\mathcal{C}$ giace su un cono Σ.
Determinare i piani principali di $\mathcal{C}$ in $P_0 : (1, 0, 0)$, nonché la curvatura e la torsione nello stesso punto.

(2) Con riferimento all'esercizio 1, si determini la curvatura normale di $\mathcal{C}$ in P_0.
(il cono è orientato tramite la normale "esterna")
Si dica se $\mathcal{C}$ è una geodetica di Σ.
Come si ottengono le geodetiche di Σ?

Tempo a disposizione: 1h 30m

Le risposte vanno adeguatamente giustificate.

1



$\mathcal{C}: \quad \underline{r} = ((1-t)\cos t,\ (1-t)\sin t,\ t)$

cono: $\quad x^2 + y^2 = (1-t)^2 = (1-z)^2$

$-\infty < t < 1$ $\qquad \boxed{\text{cono: } x^2+y^2-(1-z)^2=0}$

piani principali in $P_0 = \underline{r}(0) = (1,0,0) \qquad (t=0)$

$$\underline{r} = ((1-t)\cos t,\ (1-t)\sin t,\ t)$$

$$\dot{\underline{r}} = (-\cos t - (1-t)\sin t,\ -\sin t + (1-t)\cos t,\ 1)$$

$$\ddot{\underline{r}} = (\sin t + \sin t - (1-t)\cos t,\ -\cos t - \cos t - (1-t)\sin t,\ 0)$$

$$\ddot{\underline{r}} = (2\sin t - (1-t)\cos t,\ -2\cos t - (1-t)\sin t,\ 0)$$

$$\dddot{\underline{r}} = (\underbrace{2\cos t + \cos t}_{3\cos t} + (1-t)\sin t,\ +\underbrace{2\sin t + \sin t}_{3\sin t} - (1-t)\cos t,\ 0)$$

$\dot{\underline{r}}_0 = \dot{\underline{r}}(P_0) = (-1, 1, 1) \qquad \underline{t}_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1)$

$\ddot{\underline{r}}_0 = (-1, -2, 0) \qquad \dddot{\underline{r}}_0 = (3, -1, 0)$

$$\dot{\underline{r}}_0 \times \ddot{\underline{r}}_0 = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \underline{i}(2) - \underline{j}(+1) + \underline{k}\cdot 3 = (2, -1, 3)$$

$\underline{b}_0 \propto (2,-1,3) \qquad \underline{b}_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{14}}(2,-1,3)$

$\|\ \|^2 = 4+1+9 = 14$

$$\underline{n}_0 = \underline{b}_0 \times \underline{t}_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{42}} \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \pm \frac{1}{\sqrt{42}} \left[\underline{i}(-4) - \underline{j}(+5) + \underline{k}(+1) \right] = \mp \frac{1}{\sqrt{42}} \left[4\underline{i} + 5\underline{j} - \underline{k} \right]$$

il segno corretto è $-$ ($\underline{n}_0$ punta all'interno)

$\Rightarrow \quad \underline{t}_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1), \quad \underline{n}_0 = -\frac{1}{\sqrt{42}}(4,5,-1), \quad \underline{b}_0 = -\frac{1}{\sqrt{14}}(2,-1,3)$

piani principali

normale: $-1(x-1) + 1 \cdot y + 1 \cdot z = 0$ $\qquad \langle \underline{r} - \underline{r}_0, \dot{\underline{r}}_0 \rangle = 0$

$x - 1 - y - z = 0$ $\qquad \boxed{x - y - z - 1 = 0}$

osculatore: $2(x-1) - 1 \cdot y + 3z = 0$ $\qquad \dot{r}_0 \times \ddot{r}_0$

$\langle \underline{r} - \underline{r}_0, \underline{b}_0 \rangle = 0$

$\boxed{2x - y + 3z - 2 = 0}$

rettificante: $4(x-1) + 5y - z = 0$ $\qquad \langle \underline{r} - \underline{r}_0, \underline{n}_0 \rangle = 0$

$\boxed{4x + 5y - z - 4 = 0}$

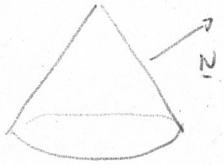
$$\kappa(P_0) = \frac{\| \dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}} \|}{\| \dot{\underline{r}} \|^3} = \frac{\sqrt{14}}{3^{3/2}} = \sqrt{\frac{14}{27}}$$

$$\tau(P_0) = - \frac{\langle \dot{\underline{r}}_0 \times \ddot{\underline{r}}_0, \dddot{\underline{r}}_0 \rangle}{14} = - \frac{6+1}{14} = - \frac{7}{14} = - \frac{1}{2}$$

$\dddot{r}_0 = (3, -1, 0)$

$\dot{\underline{r}}_0 \times \ddot{\underline{r}}_0 = (2, -1, 3)$

② Curvatura normale



normale "esterna" del cono

$$f = x^2 + y^2 - (1-z)^2 = 0$$

$$\nabla f = (2x, 2y, +2(1-z))$$

$$\nabla f(P_0) = (2, 0, 2)$$

$$\underline{N}_0 = +\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$$

calcoliamo $\quad k_n(P_0) = k \circ \langle \underline{n}_0, \underline{N}_0 \rangle$

$$= \sqrt{\frac{14}{27}} \left\langle -\frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{27}}(4-1) = -\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{27}} \cdot 3 = -\sqrt{\frac{9}{2 \cdot \cancel{27}_{3}}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{6}}$$

$\mathcal{C}$ non è una geodetica: $k_g(P_0) \neq 0$ (e così localmente e in generale)

Il cono è una sup. sviluppabile: le sue geodetiche sono pertanto le immagini delle rette del piano