GEOMETRIA II

a. a. 2014/15

Prof. M. Spera, UCSC_Brescia

Prova scritta del 25 giugno 2015

(1) Determinare l'evoluta della curva piana

$\mathcal{C}$: $\quad \rho = e^{\varphi} \qquad \varphi \in \mathbb{R}$ (coord. polari)

(verificare che $\underset{\mathcal{E}}{\underset{\uparrow}{Q(\varphi)}} = i \underset{\mathcal{C}}{\underset{\uparrow}{P(\varphi)}}$ (formalismo misto))

(si consiglia il metodo standard)

(2) Si consideri la superficie Σ:

$$\underline{r}(s,t) = (1-t,\ t\cos s,\ t\sin s) \qquad s \in [0, 2\pi),\ t > 0$$

verificare che Σ è una rigata sviluppabile

(si può vedere in più modi)

Tempo a disposizione: 1h 30m

Le risposte vanno adeguatamente giustificate

(1) Evoluta di $\mathscr{C}$: $\rho = e^{\varphi}$ $\quad \begin{cases} x = e^{\varphi}\cos\varphi \\ y = e^{\varphi}\sin\varphi \end{cases}$

$$P = (e^{\varphi}\cos\varphi,\ e^{\varphi}\sin\varphi)$$

$$\dot{P} = (e^{\varphi}\cos\varphi - e^{\varphi}\sin\varphi,\ e^{\varphi}\sin\varphi + e^{\varphi}\cos\varphi)$$

$$\dot{P} = (e^{\varphi}(\cos\varphi - \sin\varphi),\ e^{\varphi}(\sin\varphi + \cos\varphi))$$

$$i\dot{P} = (-e^{\varphi}(\sin\varphi + \cos\varphi),\ e^{\varphi}(\cos\varphi - \sin\varphi))$$

$$\ddot{P} = (e^{\varphi}(\cos\varphi - \sin\varphi + (-\sin\varphi) - \cos\varphi),\ e^{\varphi}(\sin\varphi + \cos\varphi + \cos\varphi - \sin\varphi))$$

$$= (e^{\varphi}(-2\sin\varphi),\ e^{\varphi}(2\cos\varphi))$$

$$\langle i\dot{P}, \ddot{P}\rangle = 2e^{2\varphi}\sin\varphi(\sin\varphi + \cos\varphi) + 2e^{2\varphi}\cos\varphi(\cos\varphi - \sin\varphi)$$

$$= 2e^{2\varphi}\left[\sin^2\varphi + \cancel{\sin\varphi\cos\varphi} + \cos^2\varphi - \cancel{\sin\varphi\cos\varphi}\right]$$

$$= 2e^{2\varphi}$$

$$\|\dot{P}\|^2 = e^{2\varphi}\left[(\cos\varphi - \sin\varphi)^2 + (\sin\varphi + \cos\varphi)^2\right] = \dots$$

$$= 2e^{2\varphi}$$

$$\underset{\mathcal{E}}{\underset{\uparrow}{Q}} = \underset{\mathscr{C}}{\underset{\uparrow}{P}} + \underbrace{\frac{\|\dot{P}\|^2}{\langle i\dot{P}, \ddot{P}\rangle}}_{=1} i\dot{P} = P + i\dot{P}$$

$$= \left(e^{\varphi}\cos\varphi - e^{\varphi}(\cos\varphi + \sin\varphi),\ e^{\varphi}\sin\varphi + e^{\varphi}(\cos\varphi - \sin\varphi)\right)$$

$$= (-e^{\varphi}\sin\varphi,\ e^{\varphi}\cos\varphi) = iP$$

notare che $\mathscr{C} \cap \mathcal{E} = \emptyset$ $\quad$ $\begin{matrix} -\sin\varphi = \cos\varphi \\ \sin\varphi = \cos\varphi \end{matrix}$ $\Rightarrow \sin\varphi = \cos\varphi = 0$ assurdo!

tuttavia se $\varphi \to -\infty$, entrambe contengono l'origine

(2) Si consideri Σ:

$$\underline{r}(s,t) = (1-t,\ t\cos s,\ t\sin s)$$

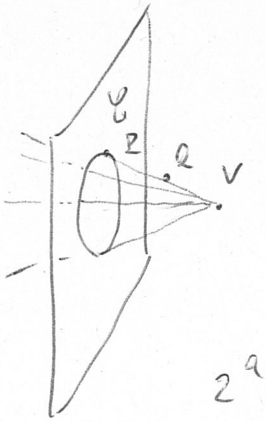
$s \in [0, 2\pi)$
$t > 0$

verificare che Σ è una rigata sviluppabile
(si può vedere in due modi)

$(1-t < 1)$

Sol. 1^a Rapidissima: Σ è la porzione di cono di vertice $V : (1, 0, 0)$ la cui intersezione col piano $x = 0$ (piano (y,z)) è la circonferenza

$\mathscr{C}: \ s \longmapsto (0, \cos s, \sin s) = P$ (per $t=1$)



$$Q = V + t(P - V)$$
$$\uparrow$$
$$\Sigma$$

$$\begin{cases} x = 1 + t(-1) = 1-t \\ y = 0 + t\cos s = t\cos s \\ z = 0 + t\sin s = t\sin s \end{cases}$$

2^a sol. Standard: osserviamo che

$$t \longmapsto \underbrace{\underline{r}(s_0, t)}_{\substack{\uparrow \\ s_0 \text{ fisso}}}$$ è una retta, dunque

Σ è rigata. Calcoliamo le forme fond. e la curvatura gaussiana: basterà verificare che $K = 0$

$\underline{r} = (1-t,\ t\cos s,\ t\sin s)$,

$\underline{r}_s = (0,\ -t\sin s,\ t\cos s)$,

$\underline{r}_t = (-1,\ \cos s,\ \sin s)$,

$\underline{r}_{ss} = (0,\ -t\cos s,\ -t\sin s)$,

$\underline{r}_{ts} = \underline{r}_{st} = (0,\ -\sin s,\ \cos s)$,

$\underline{r}_{tt} = (0,\ 0,\ 0)$,

$$\underline{r}_s \times \underline{r}_t = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & -t\sin s & t\cos s \\ -1 & \cos s & \sin s \end{vmatrix}$$

$$= -t\,\underline{i} - \underline{j} \cdot t\cos s + \underline{k}(-t\sin s)$$
$$= -t\,\underline{i} - t\cos s\,\underline{j} - t\sin s\,\underline{k}$$

$$\|\underline{r}_s \times \underline{r}_t\|^2 = t^2 + t^2 = 2t^2$$

$$\underline{N} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{i} + \cos s\,\underline{j} + \sin s\,\underline{k})$$

$E = \|\underline{r}_s\|^2 = t^2$ $\qquad e = \langle \underline{r}_{ss}, \underline{N} \rangle = ..$ (non serve)

$F = 0$ $\qquad g = 0$ $\qquad \Rightarrow eg - f^2 = 0$

$G = 1 + 1 = 2$ $\qquad f = .. = 0$ $\qquad \Rightarrow K = 0$

variante: determiniamo il piano tangente in un pto generico e verifichiamo che non varia lungo la generatrice passante per questo pto:

$$\langle \underline{r} - \underline{r}_0 , \underline{r}_s \times \underline{r}_t \rangle = 0$$

$$\begin{vmatrix} x-(1-t) & y - t\cos s & z - t\sin s \\ 0 & -t\sin s & t\cos s \\ -1 & \cos s & \sin s \end{vmatrix} =$$

$$= (x-1+t)\cdot(-t) - (y - t\cos s)\cdot t\cos s + (z - t\sin s)(-t\sin s) = 0$$

$(t>0)$

$$+(x-1+t) + (y - t\cos s)\cos s + (z - t\sin s)\sin s = 0$$

$$x + y\cos s + z\sin s + t - 1 \underbrace{-t\cos^2 s - t\sin^2 s}_{-t} = 0$$

$$\boxed{x + \cos s\cdot y + \sin s\cdot z - 1 = 0}$$

che non dipende da t, fissato s.