GEOMETRIA II

a.a. 2015/16

Prova scritta del 14 luglio 2016

1. Scrivere l'eq. parametrica della superficie rigata $\mathcal{R}$ avente per direttrice

$$\mathcal{C} = \begin{cases} x = 0 \\ y = \cos s \\ z = \sin s \end{cases}$$

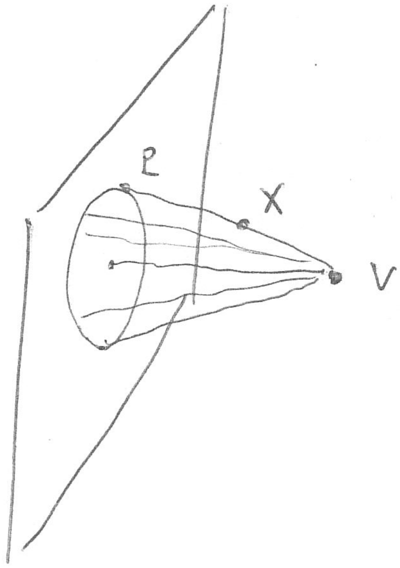
e come generatrici le rette PV, con $P \in \mathcal{C}$ e $V = (1, 0, 0)$

Dimostrare che $\mathcal{R}$ è sviluppabile

2. Determinare l'angolo di parallelismo $\alpha_{\parallel}$ che si ottiene trasportando parallelamente un vettore ~~tangente~~ a $\mathcal{R}$ lungo $\mathcal{C}$ (orientata in senso antiorario.

3. fac. Se si applica la formula di Levi-Civita si arriva ad un apparente paradosso. Come si scioglie il dilemma?

(1)



R: Direttrice:

$$\mathcal{C}: \begin{cases} x = 0 \\ y = \cos s \\ z = \sin s \end{cases}$$

generatrici: rette PV, $P \in \mathcal{C}$,

$V = (1, 0, 0)$

retta PV: $P: (0, \cos s, \sin s)$
$V: (1, 0, 0)$

$X \in PV$: $$X = (1-t)\underline{P} + t\underline{V} \qquad t \in \mathbb{R}$$

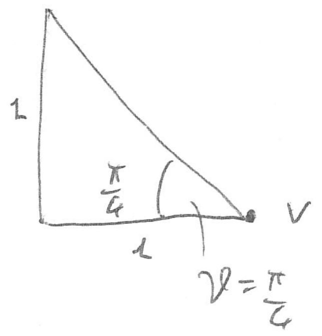
$$= (1-t)\begin{pmatrix} 0 \\ \cos s \\ \sin s \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} t \\ (1-t)\cos s \\ (1-t)\sin s \end{pmatrix}$$

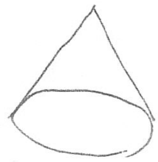
R: $\underline{r}(s,t) = \big(t, (1-t)\cos s, (1-t)\sin s\big)$

È ovviamente sviluppabile (è un cono); in ogni caso è immediato verificare che il piano tangente non varia lungo le generatrici, o che $K = 0$

② Calcolare l'angolo di parallelismo lungo $\mathcal{C}$ (orientata in senso antiorario)

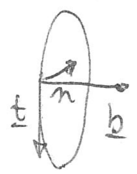


Si trova

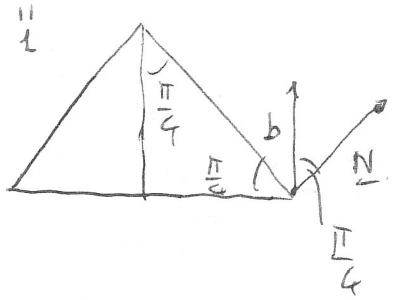


$$\alpha_{\parallel} = 2\pi(1 - \sin\vartheta)$$
$$= 2\pi\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
$$= 2\pi\,\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} = \pi\sqrt{2}\,(\sqrt{2}-1)$$

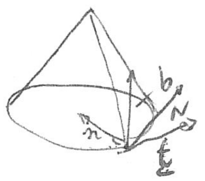
Vediamolo anche in altro modo, calcolando $k_g^{\mathcal{C}}$



$$k_g^{\mathcal{C}} = \underbrace{\frac{1}{R}}_{=1} \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \int_{\mathcal{C}} k_g^{\mathcal{C}}\, ds = \ldots = 2\pi\frac{1}{\sqrt{2}}$$



$$\alpha_{\parallel} = 2\pi - 2\pi\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$= 2\pi\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \checkmark$$



③ (fac) Il contrasto con la formula di Levi-Civita è solo apparente: Σ è singolare in V, per cui non si può applicare la formula così com'è

[Pensando la curvatura del cono concentrata in V, si ristabilisce la formula]