GEOMETRIA II

a.a. 2015/16 - Prof. M. Spera, UCSC Brescia

Prova scritta del 16 febbraio 2017

① Sia data in $\mathbb{R}^3$ la superficie

$$\Sigma_\alpha : x^2 + y^2 + \alpha z^2 - 1 = 0 \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

Sia $P : (1, 0, 0)$ $(\in \Sigma_\alpha)$

Determinare α in modo che P sia, rispettivamente, ellittico, iperbolico, parabolico [si utilizzi il calcolo implicato].

② Per $\alpha = -1$, si determinino le linee di curvatura e le linee asintotiche passanti per P.

Tempo a disposizione: 1h 30m

Le risposte vanno adeguatamente giustificate

① $\Sigma_\alpha : x^2+y^2+\alpha z^2-1=0$

$P:(1,0,0)\in\Sigma_\alpha \quad \forall\alpha$

Det. α in modo che P sia rispettivamente ellittico, iperbolico, parabolico.

Sol. una soluzione rapida è possibile ed immediata

P: ellittico $\iff \alpha>0$ (ellissoide)

iperbolico $\iff \alpha<0$ (iperboloide rigato)

parabolico $\iff \alpha=0$ cilindro

Calcoliamo però $K(P)$. Utilizziamo il calcolo implicito per $x=\varphi(y,z)$ ← notare!

$$\varphi^2+y^2+\alpha z^2-1=0$$

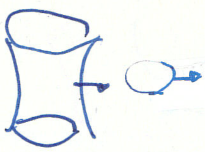
$\varphi^0,\ \varphi^0_y \ldots$ ecc. devono calcolate in P

$$\begin{cases}\cancel{2}\varphi_y\varphi+\cancel{2}y=0\\ \cancel{2}\varphi_z\varphi+\cancel{2}\alpha z=0\end{cases}$$

$\varphi^0_y=0$, $\varphi^0_z=0$ ← da entrambi

$$\begin{cases}\varphi_{yy}\varphi+\varphi_y^2+1=0\\ \varphi_{yz}\varphi+\varphi_y\varphi_z=0\\ \varphi_{zz}\varphi+\varphi_z^2+\alpha=0\end{cases}$$

$\varphi^0_{yy}=-1$, $\varphi^0_{yz}=0$, $\varphi^0_{zz}=-\alpha$



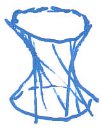
$N^0=(1,0,0)$ $\quad E^0=G^0=1$ $\quad F^0=0$

$e^0=-1$, $f^0=0$, $g^0=-\alpha$

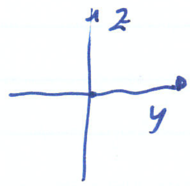
$$K_0=\frac{e^0g^0-f^{0\,2}}{E^0G^0-F^{0\,2}}=\alpha \begin{cases}>0 & \text{dato ellittico}\\ =0 & \text{parabolico}\\ <0 & \text{iperbolico}\end{cases}$$

② Posto $\alpha = -1$, si determinino le direzioni principali e asintotiche in $P: (1, 0, 0)$

$\Sigma_{-1}: \quad x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$ ip. rigato, di rotazione



$T_P \Sigma_{-1}: \quad x = 1$



4 direzioni principali $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 1 \\ z = 0 \end{cases}$

dir. asintotiche $\sim (0, \alpha, \beta)$

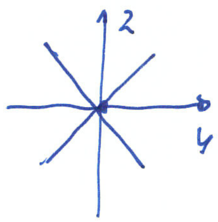
$$e^0 \cdot \alpha^2 + 2 f^0 \alpha \beta + g^0 \cdot \beta^2 = 0$$

$$-\alpha^2 + \beta^2 = 0 \qquad \alpha^2 = \beta^2 \qquad \alpha = \pm \beta$$

$$\Rightarrow \quad V_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad V_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

rette corrisp. → (linee asintotiche, poiché giacciono su Σ_{-1})

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = t \end{cases}, \qquad \begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = -t \end{cases}$$



linee di curvatura: $\begin{cases} x^2 - z^2 - 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases}, \quad x > 0$

meridiano per P

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

parallelo per P