GEOMETRIA II

a.a. 2015-16

Prova scritta del 16 giugno 2016

① (i) Dato l'elicoide Σ: $\underline{r} = (u\cos v, u\sin v, v)$

$u>0$, $v\in\mathbb{R}$

si ne calcolino le forme fondamentali, la curvatura gaussiana e la curvatura media.

(ii) Si verifichi che le curve $u=u_0$, $v=v_0$ (coord. curvilinee) costituiscono le linee asintotiche di Σ, sfruttando (i) [Sugg: indicatrice di Dupin]

② Si risolva il punto (ii) dell'esercizio ① con il calcolo esplicito della curvatura normale.

Dove si le linee asintotiche in questione risultano essere geodetiche di Σ.

Tempo a disposizione: 1h.30m

Le risposte vanno adeguatamente giustificate

Geo II

① Σ: Elicoide

$$\underline{r} = (u\cos v,\ u\sin v,\ v) \qquad u>0,\ v\in\mathbb{R}$$

$$\underline{r}_u = (\cos v,\ \sin v,\ 0)$$

$$\underline{r}_v = (-u\sin v,\ u\cos v,\ 1)$$

$$\underline{r}_{uu} = (0,\ 0,\ 0)$$

$$\underline{r}_{uv} = (-\sin v,\ \cos v,\ 0)$$

$$\underline{r}_{vv} = (-u\cos v,\ -u\sin v,\ 0)$$

$$\underline{N} = \frac{\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u\sin v & u\cos v & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{}}$$

$$\begin{vmatrix} \cdots \end{vmatrix} = \underline{i}\sin v - \underline{j}\cos v + \underline{k}\, u$$

$$\underline{N} = \frac{(\sin v,\ -\cos v,\ u)}{\sqrt{u^2+1}}$$

$$E = \langle \underline{r}_u, \underline{r}_u\rangle = 1 \qquad F = 0 \qquad G = 1+u^2$$

$$e = \langle \underline{r}_{uu}, \underline{N}\rangle = 0$$

$$f = \frac{(-\sin^2 v - \cos^2 u)}{\sqrt{u^2+1}} = \frac{-1}{\sqrt{u^2+1}}$$

$$g = \langle r_{vv}, \underline{N}\rangle = 0$$

$$K = \frac{eg-f^2}{EG-F^2} = -\frac{1}{(u^2+1)}\cdot\frac{1}{(u^2+1)} = -\frac{1}{(1+u^2)^2}$$

$$H = \frac{1}{2}\ \frac{Eg-2Ff+Ge}{EG-F^2} = \ldots = 0 \qquad (\Sigma \text{ è minima})$$

Coord. curvilinee: $u = c_1 \rightsquigarrow$ eliche cil.

$v = c_2 \rightsquigarrow$ generatrici.

Linee asintotiche: $k_n = 0$

Infatti le generatrici lo sono banalmente, le eliche sono ad esse $\perp$, poichè $H=0$, le curve asintotiche sono $\perp$ tra loro, dunque anche le eliche sono linee asintotiche

Segue anche subito dall'eq.
$$e\dot{u}^2 + 2f\dot{u}\dot{v} + g\dot{v}^2 = 0$$
nel nostro caso
$$e = g = 0$$
$$\dot{u}\dot{v} = 0 \Rightarrow u = u_0,\ v = v_0$$

(*)

② $k_n = 0$ con un calcolo esplicito. (Vedi anche (*) nella pag. precedente)

Per le semirette ok.

Consideriamo un'elica cilindrica

$$\underline{r} = (r_0 \cos v,\ r_0 \sin v,\ v)$$

per semplicità, ma senza perdere in generalità, poniamo $r_0 = 1$, sicché $s = v$

$$\underline{r}' = (-\sin v,\ \cos v,\ 1)$$

$$\underline{r}'' = (-\cos v,\ -\sin v,\ 0)$$

$$\Rightarrow \quad k = \|\underline{r}''\| = 1 \quad \text{e} \quad \underline{n} = (-\cos v,\ -\sin v,\ 0)$$

norm. principale ("$\underline{r}''$")

Si ha subito

$$\langle \underline{N}, \underline{n} \rangle = \frac{1}{\sqrt{\ }} \langle (\sin v,\ -\cos v,\ u),\ (-\cos v,\ -\sin v,\ 0) \rangle = 0$$

Sicché effettivamente $k_n = k \langle \underline{N}, \underline{n} \rangle = 0$

Le semirette sono ovviamente geodetiche, le eliche no: $|k_g| = k > 0$.