GEOMETRIA II

a.a. 2015/16 - Prof. M. Spera UCSC Brescia

Prova scritta del 2 febbraio 2017

① Determinare, in due modi, l'evoluta di $y = x^4$ $(x = t, y = t^4)$.
Cosa accade per $t \to 0$? Spiegare

② Sia data $\Sigma: x^2 + y^2 - z^2 = 1$
(di che superficie si tratta?)
Sia $P: (1, 2, 2) \in \Sigma$.
Si determini il piano tangente $T_P \Sigma$.
Successivamente si individuino le direzioni asintotiche in $T_P \Sigma$
[Sugg. Data la natura di Σ, è possibile fornire una soluzione semplice...]

Tempo a disposizione: 1h 30m

Le risposte vanno adeguatamente giustificate.

① $y = x^4$ evoluta

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^4 \end{cases}$$

Inviluppo delle normali $\longrightarrow$ $\underset{\underset{1}{\parallel}}{\dot{x}}(x-t) + \underset{\underset{4t^3}{\parallel}}{\dot{y}}(y-t^4) = 0$

$$F(x,y,t) = x - t + 4t^3\underbrace{(y-t^4)}_{} = 0 \qquad -4t^7$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -1 + 12t^2 y - \underbrace{4\cdot 7}_{28} t^6 = 0$$

$$\left[\, y = \frac{28t^6+1}{12t^2} \,\right] \quad t \neq 0$$

$$x = t - 4t^3\left(\frac{28t^6+1}{12t^2} - t^4\right)$$

$$= t - 4t^3\,\frac{28t^6+1-12t^6}{12t^2} = t - t\,\frac{16t^6+1}{3}$$

$$= t\left\{\frac{3-16t^6-1}{3}\right\} = t\,\frac{2-16t^6}{3} = \frac{2}{3}t\,(1-8t^6)$$

$$\boxed{x = \frac{2}{3}t\,(1-8t^6)}$$

Variante:

$$y = x^4 \qquad y' = 4x^3, \quad y'' = 12x^2$$

$$\left(k = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} = \frac{12x^2}{(1+16x^6)^{3/2}} \qquad \rho = \frac{(1+16x^6)^{\frac{3}{2}}}{12x^2} \right)$$

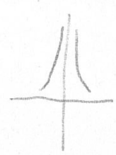
$$Q = P + \rho \underline{n} = P + \frac{\|\dot{P}\|^2}{\langle i\dot{P}, \ddot{P}\rangle} i\dot{P}$$

$$P: (t, t^4)$$
$$\dot{P} = (1, 4t^3) \qquad \|\dot{P}\|^2 = 1 + 16t^6$$
$$i\dot{P} = (-4t^3, 1) \qquad \langle i\dot{P}, \ddot{P}\rangle = 12t^2$$
$$\ddot{P} = (0, 12t^2)$$

$$Q = \begin{pmatrix} t \\ t^4 \end{pmatrix} + \frac{1+16t^6}{12t^2} \cdot \begin{pmatrix} -4t^3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad x = t + \frac{1+16t^6}{\cancel{12}_3 \, t^2}(-4t^3) = t\,\frac{(3-1-16t^6)}{3}$$
$$= \frac{2}{3}t\,(1-8t^6) \quad \checkmark$$

$$y = t^4 + \frac{1+16t^6}{12t^2} = \frac{1+28t^6}{12t^2} \quad \checkmark$$

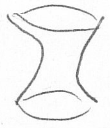


$\mathcal{E}$

☆ Se $t \to 0 \quad x \to 0 \quad y \to +\infty$

Si ha una "cuspide all'∞" ($x=0$ asintoto verticale)

② Sia Σ: $x^2+y^2-z^2=1$



Sia P: $(1, 2, 2) \in \Sigma$

determinare $T_P\Sigma$

$$\underbrace{f_x^0}_{=\,2x_0}(x-x_0)+\underbrace{f_y^0}_{=\,2y_0}(y-y_0)+\underbrace{f_z^0}_{=\,-2z_0}(z-z_0)=0$$

$$2(x-1)+4(y-2)-4(z-2)=0$$

$$x-1+2(y-2)-2(z-2)=0$$

$$x+2y-2z-1-\cancel{4}+\cancel{4}=0$$

$$\boxed{T_P\Sigma: \quad x+2y-2z-1=0}$$

direzioni asintotiche:
(in questo caso l'intersezione in questione consiste di due rette)

$$\begin{cases} x^2+y^2-z^2=1 \\ x+2y-2z-1=0 \end{cases}$$

$$x-1=2(z-y) \qquad\qquad x^2-1=z^2-y^2$$

$$(x+1)(x-1)=(z+y)(z-y)$$

$$(x+1)(x-1)=(z+y)\,\frac{x-1}{2}$$

$$(x-1)\left\{x+1-\frac{z+y}{2}\right\}=0$$

$$x-1=0 \qquad\qquad 2x+2-z-y=0$$

ottengo le rette

$$r: \begin{cases} x+2y-2z-1=0 \\ x-1=0 \end{cases} \quad \text{ossia } r: \begin{cases} y-z=0 \\ x-1=0 \end{cases}$$

$$\text{e } r': \begin{cases} x+2y-2z-1=0 \\ 2x+2-z-y=0 \end{cases} \quad r': \begin{cases} x+2y-2z-1=0 \\ 2x-y-z+2=0 \end{cases}$$

determiniamone i parametri direttori

$$r: \begin{cases} x=1 \\ y=t \\ z=t \end{cases} \qquad r: \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

r' l, m, n $\propto$ minori estratti da

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$l \propto \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -2-2 = -4$$

$$m \propto -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -(\underbrace{-1+4}_{3}) = -3$$

$$n \propto \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1-4 = -5$$

$\Rightarrow$ direzioni asintotiche $\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ e $\left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle$

Le rette r, r' possono essere parametrizzate così:

$$r: \quad \underline{p} + t\,\underline{a} \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2+t \\ 2+t \end{pmatrix}$$

$$r': \quad \underline{p} + t\,\underline{a}' \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4t \\ 2+3t \\ 2+5t \end{pmatrix}$$

controlliamo che si trovino su Σ $\quad x^2+y^2-z^2=1$

$r: \quad ✓$

$r': \quad f \equiv (1+4t)^2 + (2+3t)^2 - (2+5t)^2 - 1 = 0 \; ?$

$t = 0 \Rightarrow f = 0$

coeff. di t: $\quad 8 + 12 - 20 = 0 \quad ✓$

coeff. di t^2: $\quad 16 + 9 - 25 = 0 \quad ✓$