GEOMETRIA II

a.a. 2014/15 - Prof. M. Spera - UCSC - Brescia

Prova scritta del 30 giugno 2016

(1) Calcolare le curvature principali e la curvatura gaussiana della superficie Σ ottenuta ruotando

$\mathcal{C}: \quad z^2 - x^2 - 1 = 0 \quad (z > 0)$ attorno all'asse x.

[Si operi su un generico parallelo]

Quali paralleli risultano essere geodetiche di Σ ?

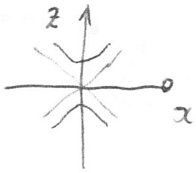
(2) Si ruoti la curva $\mathcal{C}$ $(x > 0, z > 0)$ dell'esercizio 1 attorno all'asse z, ottenendo una superficie Σ'. Dimostrare che Σ e Σ' non possono essere isometriche.

Tempo a disposizione: 1h 30m

Le risposte vanno adeguatamente giustificate.

Geo II 30/6/16

① Σ: superficie di rotazione ottenuta ruotando



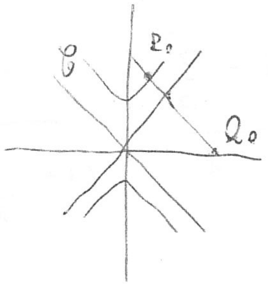
$$\mathcal{C} \quad f = z^2 - x^2 - 1 = 0 \qquad (z>0)$$

attorno all'asse x

$$\Sigma: \quad z^2 + y^2 - x^2 - 1 = 0$$

Calcoliamo K in $P_0: (x_0, 0, z_0) \in \Sigma$ $(z_0 > 0)$

(sarà K su un parallelo generico) $\quad z_0^2 - x_0^2 - 1 = 0$



Utilizziamo il teorema della gran normale.

normale a $\mathcal{C}$ in P_0:

$$f_z^0 (x - x_0) - f_x^0 (z - z_0) = 0$$

$$f_x = -2x \qquad f_z = 2z$$

$$\cancel{2} z_0 (x - x_0) + \cancel{2} x_0 (z - z_0) = 0$$

troviamo Q_0: si pone $z = 0 \Rightarrow$

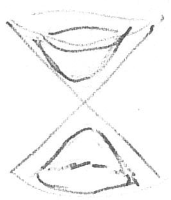
$$x - x_0 = \frac{z_0 x_0}{z_0} = x_0 \Rightarrow x_Q = 2x_0$$

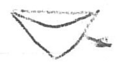
$$\overline{P_0Q_0}^2 = (2x_0 - x_0)^2 + z_0^2 = x_0^2 + z_0^2 = x_0^2 + x_0^2 + 1 = 2x_0^2 + 1$$

$$N = \sqrt{2x_0^2 + 1} \qquad \boxed{k_2 = -\frac{1}{\sqrt{2x_0^2 + 1}}}$$

curvatura normale del parallelo gen.

(2) Facendo ruotare $\mathcal{C}$ ($x>0$, $z>0$) attorno all'asse z si ottiene una sup. a curvatura <u>positiva</u>(+) (iperboloide ellittico), che non può essere isometrica alla precedente (paraboloide iperbolico) che è a curvatura negativa, in virtù del Theorema Egregium di Gauss.



(+) È facile rendersi conto del fatto che k_1 e k_2 sono concordi (e <0  con l'orientamento indicato)