GEOMETRIA II

a.a. 2015/16

Prova scritta dell' 8 settembre 2016

(1) Sia data la superficie $\Sigma: \ x^2+y^2-z^2-1=0$ (di che cosa si tratta?) e la famiglia di piani $\pi_c: \ x=c \ , \ |c|<1$.

Sia $\mathscr{C}_c = \Sigma \cap \pi_c$. Determinare c in modo che $\mathscr{C}_c$ sia una geodetica di Σ.

Cosa accade per $c=1$? Spiegare.

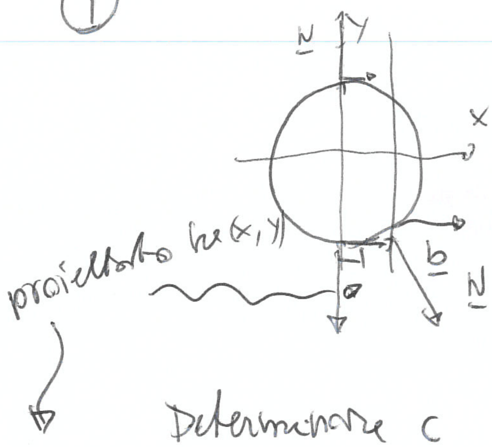
(2) Dato l'elicoide $\Sigma: \ \underline{r} = (u\cos v, u\sin v, v)$
$u>0, \ v\in\mathbb{R}$

dimostrare in due modi che esso non è una rigata sviluppabile.

Tempo a disposizione: 1h 30m.

Le risposte vanno adeguatamente giustificate.

①



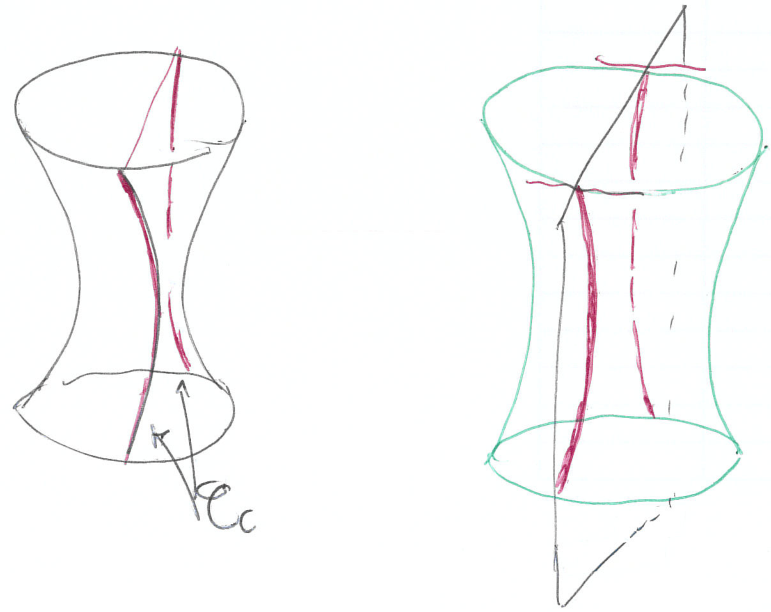
$$\Sigma: x^2+y^2-z^2-1=0$$

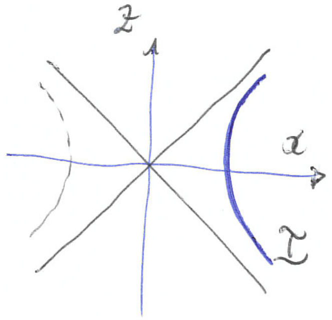
$$\pi_c : x = c \qquad |c|<1$$

$$\mathcal{C}_c = \Sigma \cap \pi_c$$

Determinare c in modo che $\mathcal{C}_c$ sia una geodetica

(*) La componente z di $\underline{N}$ è sempre $\perp$ $\underline{b}$





Sol: Σ è un iperboloide iperbolico di rotazione (del ramo di iperbole I attorno all'asse z)

La curvatura geodetica di $\mathcal{C}_c$ (che è un'iperbole) vale, in modulo

$$|k_g| = k\,|\langle \underline{b}, \underline{N} \rangle|$$

$\underline{b}$ versore binormale di $\mathcal{C}_c$, costante (la curva è opportunamente orientata) .. $k_g = 0 \Leftrightarrow \langle \underline{b}, \underline{N}\rangle = 0$ ($\underline{N}$, normale "esterna" all'iperboloide). Dalla geometria del problema è $\langle b, \underline{N}\rangle = 0 \Leftrightarrow c=0$: $\mathcal{C}_0$ consta di due meridiani di Σ, che, come già sappiamo, dà luogo a geodetiche di una sup. di rotazione.

Se $c=1$, $\mathcal{C}_c$ è una coppia di rette,

ed esse danno luogo alle direzioni asintotiche;

di più, alle linee asintotiche passanti per $P_0 : (1,0,0)$ $\in \Sigma$

Il piano $\pi_1 : x = 1$ è infatti il piano tangente a Σ in P_0

(f) Dettagli

$$\Sigma : \overbrace{x^2 + y^2 - z^2 - 1}^{f} = 0 \qquad f = 0$$

$$\underline{N} \propto \nabla f = (2x, 2y, -2z)$$

$$\underline{b} = (1,0,0) \quad \text{per es.}$$

$$\langle \nabla f, \underline{b} \rangle = 2x$$

$$k_g = \underset{\neq 0}{k} \langle \underline{N}, \underline{b} \rangle = \underset{\neq 0}{c}\, x = 0 \iff x = 0$$

ovvero, si ha un meridiano.

(2) Sia dato l'elicoide $\Sigma: \underline{r} = (u\cos v, u\sin v, v)$

$u > 0, \ v \in \mathbb{R}$

Dimostrare in due modi che esso non è una rigata sviluppabile

1. Si calcola $K = -\frac{1}{(1+u^2)^2} < 0$

(se Σ fosse sviluppabile, dovrebbe essere $K=0$)

2. Determiniamo il piano tangente lungo una generatrice $\underline{\alpha}_0(u) = (u\cos v_0, u\sin v_0, v_0)$

$$\begin{array}{ccc} & \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \underline{r}_u = \\ \underline{r}_v = \end{array} \left| \begin{array}{c} (\cos v, \sin v, 0) \\ (-u\sin v, u\cos v, 1) \end{array} \right|$$

$$\underline{r}_u \times \underline{r}_v = (\sin v, -\cos v, u)$$

$$\underline{N} = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}(\sin v, -\cos v, u)$$

$$\underline{N}\Big|_{\underline{\alpha}_0}(u) = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}(\sin v_0, -\cos v_0, u)$$

$\therefore$ è variabile lungo $\underline{\alpha}_0$ $\Rightarrow$ il piano tangente varia lungo $\underline{\alpha}_0$ $\Rightarrow$ Σ non può essere sviluppabile