GEOMETRIA II

a.a. 2016/17

Prof. M. Spera – UCSC, Brescia

Prova scritta del $\boxed{\text{15 giugno 2017}}$

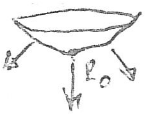
① Sia data $\mathcal{C}$: $r(t) = (t\cos t, \; t\sin t, \; t^2)$ $t \geq 0$

(avvolgentesi su Σ : $z = x^2+y^2$)

Determinare, in $P_0=(0,0,0)\in\mathcal{C}$, la curvatura $\kappa(P_0)$ di $\mathcal{C}$, nonché il triedro principale(+) (in P_0)

[Fac. Determinare $\tau(P_0)$ (torsione, in P_0)]

(+) (sugg. Può risultare utile ricordare la formula $\underbrace{\ddot{r}}_{\text{acc.}} = \underbrace{\dot{v}\,t}_{\text{acc. tang.}} + \underbrace{\frac{v^2}{\rho}\,n}_{\text{acc. centr.}}$)

② 

Σ orientata Σ come in figura, (v. es. 1)

Calcolare $\underbrace{\kappa_g^{\mathcal{C}}(P_0)}_{\text{curv. geodetica}}$ e $\underbrace{\kappa_n^{\mathcal{C}}(P_0)}_{\text{curv. normale}}$

$\mathcal{C}$ è una geodetica su Σ?

Tempo a disposizione: 1h 30m

Le risposte vanno adeguatamente giustificate.

Geometria II
15/6/2017

$\mathcal{C}$:

(1) $\underline{r} = (t\cos t,\ t\sin t,\ t^2)$

calcolare $\kappa(P_0)$ e
trovare $(\underline{t}, \underline{n}, \underline{b})$ in $P_0 = (0,0,0)$
$(t=0)$

"elica su
$z = x^2+y^2$

fac. calcolare $\tau(P_0)$

$$\underline{r} = (t\cos t,\ t\sin t,\ t^2)$$

$$\dot{\underline{r}} = (\cos t - t\sin t,\ \sin t + t\cos t,\ 2t)$$

$$\ddot{\underline{r}} = (-\sin t - \sin t - t\cos t,\ \cos t + \cos t - t\sin t,\ 2)$$
$$= (-2\sin t - t\cos t,\ 2\cos t - t\sin t,\ 2)$$

$$\dddot{\underline{r}} = (\underbrace{-2\cos t - \cos t}_{-3\cos t} + t\sin t,\ \underbrace{-2\sin t - \sin t}_{-3\sin t} - t\cos t,\ 0)$$

in P_0:

$$\underline{r} : (0,0,0)$$
$$\dot{\underline{r}} = (1,0,0) = \underline{t}$$
$$\ddot{\underline{r}} = (0,2,2)$$
$$\dddot{\underline{r}} = (-3,0,0)$$

si osservi che $\|\dot{\underline{r}}\|^2 = v^2 = (\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2 + 4t^2$

e $$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\quad) = 2(\quad)\underbrace{(-\sin t - \sin t - t\cos t)}_{=0}$$
$$+ 2\underbrace{(\quad)}_{=0}\frac{d}{dt}(\quad) + \underbrace{8t}_{=0}$$

Calcoliamo $k(P_0)$

$$k(P_0) = \frac{\|\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}\|}{\underbrace{\|\dot{\underline{r}}\|^3}_{=1}}$$

$$\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -\underline{j}\cdot 2 + \underline{k}\cdot 2 = (0, -2, 2)$$

$$k(P_0) = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$k(P_0) = 2\sqrt{2}$$

fac:

torsione $\rightsquigarrow$ $\begin{array}{c} \dot{\underline{r}} \\ \ddot{\underline{r}} \\ \dddot{\underline{r}} \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ -3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \implies \boxed{\tau(P_0) = 0}$

Determiniamo il triedro principale in $\underline{P_0}$

$$\underline{t} = \dot{\underline{r}} = (1, 0, 0) \quad \checkmark$$

assumiamo che $\underline{b} = \pm \dfrac{\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}}{\|\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}\|} = \pm \dfrac{1}{\sqrt{2}}(0, -1, 1)$

Come stabiliamo il segno?

Possiamo ragionare così: da $\underbrace{\ddot{\underline{r}}}_{\text{accel.}} = \underbrace{\frac{v^2}{\rho}\,\underline{n}}_{\text{accel. centripeta}} + \underbrace{\dot{v}\,\underline{t}}_{\text{acc. tangenziale}}$

e da $\dot{v}(0) = 0$ (calcolo precedente), troviamo

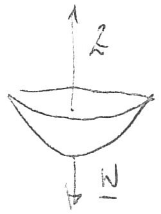
$$(0, 2, 2) = \ddot{\underline{r}} = k \cdot \underline{n} = 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1) \qquad \underline{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1)$$

sicché $\underline{b} = \underline{t} \times \underline{n} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(0, -1, 1)$

$\rightsquigarrow$ segno +

(2) Calcoliamo k_g e k_n in P_0

$\Sigma: \quad \underbrace{z-(x^2+y^2)}_{f}=0 \qquad \nabla f = (-2x, -2y, 1)$



orientiamo così

$\underline{N}(P_0) = (0, 0, -1)$

$\underline{b}(P_0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -1, 1)$

$\underline{n}(P_0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1)$

$k_g = k\langle \underline{b}, \underline{N}\rangle = 2\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -2 \qquad k_g = -2$

$k_n = 2\cdot\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -2$

controlliamo $\quad k^2 = k_g^2 + k_n^2$

$$\begin{array}{ccc} k^2 & = & k_g^2 + k_n^2 \\ \| & & \\ 8 & = & 4+4 \end{array} \quad \checkmark$$

(γ non è certamente una geodetica

variante: operando su Σ troviamo (abuso di notazione)

$$S(P_0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$e = \langle N, r_{xx}\rangle$ ecc.

P_0 : punto ombelicale

$\Rightarrow \quad k_n = -2 \quad$ in accordo con il calcolo precedente