GEOMETRIA II

Prof. M. Spera, UCSC Brescia
a.a. 2016/17

Prova scritta del 18 gennaio 2018

(1) Si determini, nello spazio euclideo, la rigata $\mathcal{R}$ individuata dalla direttrice $\mathcal{C}: \begin{cases} x = \cos s \\ y = 0 \\ z = \sin s \end{cases}$ $s \in [0, 2\pi)$
e dalle generatrici P_0V, dove
$P_0 \in \mathcal{C}$ e $V: (0,1,0)$. [Di che cosa si tratta?]
Determinare le due forme fondamentali di $\mathcal{R}$ nonché la curvatura gaussiana K.

(2) a) Dimostrare, in due modi, che $\mathcal{R}$ è sviluppabile.

b) È possibile che per una generica superficie rigata $\mathcal{R}$, risulti $K_{\mathcal{R}} > 0$? Perché?
curvatura gaussiana

Tempo a disposizione: 1h.30m.

Le risposte vanno adeguatamente giustificate.

① $\mathcal{R}$: rigata individuata dalla direttrice

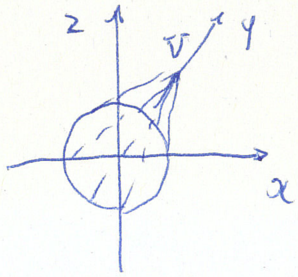
$$\mathcal{C}: \begin{cases} x = \cos s \\ y = 0 \\ z = \sin s \end{cases} \qquad s \in [0, 2\pi)$$

(circonf. di centro $O:(0,0,0)$ e raggio 1 sul piano xz

e dalle generatrici P_0V, $P_0 \in \mathcal{C}$, $V:(0,1,0)$ (cono)

Dimostrare (poss. in più modi) che $\mathcal{R}$ è sviluppabile.

<u>Sol.</u> rette P_0V, $P_0 \in \mathcal{C}$



$$\underline{r}(t) = t\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + (1-t)\begin{pmatrix}\cos s\\0\\\sin s\end{pmatrix}$$

$(t=0 \to P_0\,;\ t=1 \to V)$

$$\mathcal{R}: \quad \underline{r}(s,t) = t\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + (1-t)\begin{pmatrix}\cos s\\0\\\sin s\end{pmatrix}$$

(la stessa formula, con P_0 variabile su $\mathcal{C}$)

$$\underline{r}(s,t) = \begin{pmatrix}(1-t)\cos s\\ t\\ (1-t)\sin s\end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} s \in [0,2\pi) \\ t \in \mathbb{R} \end{array}$$

$\underline{r} = ((1-t)\cos s,\ t,\ (1-t)\sin s)$

$\underline{r}_s = (-(1-t)\sin s,\ 0,\ (1-t)\cos s)$

$\underline{r}_t = (-\cos s,\ 1,\ -\sin s)$

$\underline{r}_{ss} = (-(1-t)\cos s,\ 0\ -(1-t)\sin s) = ((t-1)\cos s,\ 0,\ (t-1)\sin s)$

$\underline{r}_{st} = (\sin s,\ 0,\ -\cos s)$

$\underline{r}_{tt} = (0,\ 0,\ 0)$

$$\underline{r}_s \times \underline{r}_t = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -(1-t)\sin s & 0 & (1-t)\cos s \\ -\cos s & 1 & -\sin s \end{vmatrix} = \underline{i}\{(t-1)\cos s\} - \underline{j}\{(1-t)\sin^2 s + (1-t)\cos^2 s\} + \underline{k}\{(t-1)\sin s\}$$

$$= \underline{i}\,(t-1)\cos s + \underline{j}\,(t-1) + \underline{k}\,\sin s\,(t-1)$$

$$\underline{r}_s \times \underline{r}_t = \big((t-1)\cos s\,,\ t-1\,,\ (t-1)\sin s\big)$$

(... chiaro intuitivamente) $t \neq 1$ altrimenti la sup è singolare

$$\underline{N} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos s\,,\ 1\,,\ \sin s)$$

$(\cos^2 s + \sin^2 s + 1 = 2)$

$$E = (1-t)^2 \sin^2 s + (1-t)^2 \cos^2 s = (1-t)^2$$

$$F = (1-t)\sin s \cos s - (1-t)\sin s \cos s = 0$$

$$G = \sqrt{2}$$

$$e = (\underline{r}_{ss}, \underline{N}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(t-1)\underbrace{[\cos^2 s + \sin^2 s]}_{1} = \frac{t-1}{\sqrt{2}}$$

$f = 0$

$g = 0$

$$\Rightarrow \quad K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = 0$$

$\Rightarrow$ $\mathcal{R}$ è sviluppabile (1° modo)

osserviamo altresì che $\underline{N} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos s, 1, \sin s)$ <u>non varia</u> rispetto a t $\Rightarrow$ il piano tangente non varia lungo una generatrice arbitraria $\Rightarrow$ $\mathcal{R}$ è sviluppabile (2° modo)