GEOMETRIA II    a.a. 2016/17

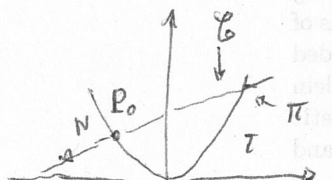
Prof. M. Spera – UCSC, Brescia

Prova scritta del $\boxed{\text{6 luglio 2017}}$

① Sia $\Sigma : z = x^2 + y^2$, $P_0 = (-1, 0, 1) \in \Sigma$

orientata come in figura

Sia $\pi : 2z - x - 3 = 0$. Si consideri $\mathcal{C} = \Sigma \cap \pi$

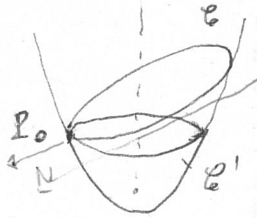



Si calcoli $k_n(P_0)$ (curvatura normale)

in due modi diversi:

1. Direttamente (conviene utilizzare il calcolo implicito)

2. Tramite il teorema di Meusnier (utilizzando $\mathcal{C}'$, il parallelo per $P_0$)




② Con riferimento all'esercizio precedente

(i) calcolare nuovamente $k_n^{\mathcal{C}}(P_0)$ tramite il teorema della gran normale

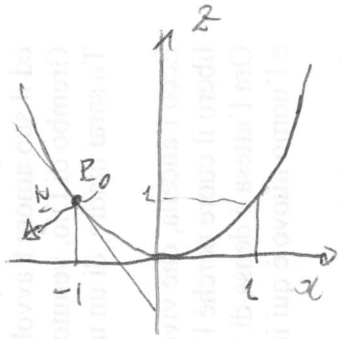
(ii) Calcolare $K(P_0)$ (curvatura gaussiana in $P_0$).

Tempo a disposizione: 1h 30m

Le risposte vanno adeguatamente giustificate

Geometria
6 luglio 2017

(1)




$\Sigma: \; z = x^2 + y^2$

$z = x^2$

$z' = 2x$

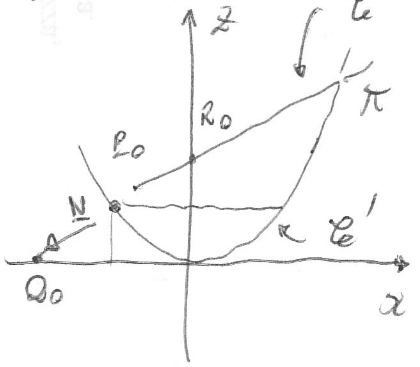
$P_0 = (-1, 0, 1)$

$m = 2(-1) = -2$ $\qquad m \, m^\perp = -1$

$m^\perp = +\frac{1}{2}$ ~ direzione di $\underline{N}$

$\underline{N}(P_0) = \frac{1}{\| \; \|}\left(-1, 0, -\frac{1}{2}\right)$

$= \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 0, -1)$




consideriamo, in $(x, z)$, la retta

$z - 1 = \frac{1}{2} \cdot (x - (-1))$

$z - 1 = \frac{1}{2}(x + 1)$

$2(z - 1) - x - 1 = 0$

$2z - x - 2 - 1 = 0$

$2z - x - 3 = 0$

$\begin{cases} 2z - x - 3 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -3$

$\mathcal{C} = \Sigma \cap \pi$ : $\begin{cases} z - x^2 - y^2 = 0 \\ 2z - x - 3 = 0 \end{cases}$

$P_0 = (-1, 0, 1) \in \mathcal{C}$

$1 - 1 = 0$ ✓

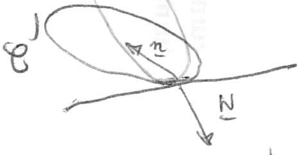
$2 + 1 - 3 = 0$ ✓

Calcolare $k_n^{\mathcal{C}}(P_0)$ in due modi, direttamente e con Meusnier

(1) Meusnier: calcoliamo $k^{\mathcal{C}'}(P_0)$

$\mathcal{C}'$ : $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = 1 \end{cases} = \begin{cases} z = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow$ circonferenza del piano $z = 1$

cil




È subito $k^{\mathcal{C}'}(P_0) = 1$

inoltre $\underline{n}^{\mathcal{C}'}(P_0) = (1, 0, 0)$

$\underline{N}(P_0) = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 0, -1)$

$\langle \underline{n}^{\mathcal{C}'}(P_0), \underline{N}(P_0) \rangle = -\frac{2}{\sqrt{5}}$

(1)

Pertanto $\quad k_n^{\mathscr{C}'}(P_0) = 1 \cdot \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{2}{\sqrt{5}}$

Ma, per Meusnier, è pure $\quad \boxed{k_n^{\mathscr{C}}(P_0) = k_n^{\mathscr{C}'}(P_0) = -\frac{2}{\sqrt{5}}}$

curve con la stessa tangente hanno la stessa curvatura normale

segno "-" ok...

(2) ci basta calcolare $k^{\mathscr{C}}(P_0)$; per evidenti ragioni geometriche risulterà $k_n^{\mathscr{C}}(P_0) = - k^{\mathscr{C}}(P_0)$

usiamo il calcolo implicito $\qquad x = x(s) \ldots$

$$\mathscr{C}: \begin{cases} z - x^2 - y^2 = 0 \\ 2z - x - 3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} z' - 2xx' - 2yy' = 0 \\ 2z' - x' = 0 \end{cases}$$

inoltre: $\quad x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$

$$\cancel{2}x'x'' + \cancel{2}y'y'' + \cancel{2}z'z'' = 0 \qquad \begin{cases} z'' - 2x'^2 - 2xx'' - 2y'^2 - 2yy'' = 0 \\ 2z'' - x'' = 0 \end{cases}$$

ora $\quad P_0 = (-1, 0, 1)$ ; si trova, successivamente

$$\underbrace{z' - 2(-1)}_{+2} x' = 0 \qquad \begin{aligned} z' + 2x' &= 0 \\ 2z' - x' &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow x' = z' = 0$$

$$\Rightarrow (y')^2 = 1 \quad \rightsquigarrow \text{scegliamo } y' = +1$$

$$z'' - 2(-1)x'' - 2 = 0$$
$$2z'' - x'' = 0$$

$$z'' + 2x'' = 2$$
$$x'' = 2z''$$

$$z'' + 4z'' = 2$$

$\mathscr{C}: \quad \underline{r}'(P_0) = (0, 1, 0)$

$\underline{r}''(P_0) = \left(\frac{4}{5}, 0, \frac{2}{5}\right)$

Da $\quad 5z'' = 2 \qquad z'' = \frac{2}{5}$

$-1 \cdot y'' = 0$

i.e. $\quad y'' = 0 \qquad x'' = \frac{4}{5}$

$$k^{\mathscr{C}}(P_0) = \|\underline{r}''(P_0)\| = \sqrt{\frac{16}{25} + \frac{4}{25}}$$

$$= \sqrt{\frac{20}{25}} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow \boxed{k_n^{\mathscr{C}}(P_0) = -\frac{2}{\sqrt{5}}} \quad \checkmark$$

③ Un terzo metodo è il seguente:

Calcoliamo la gran normale $\overline{R_0 P_0}$

nel piano $(x,z)$
$$\begin{cases} 2z - x - 3 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \qquad 2z - 3 = 0 \quad z = \frac{3}{2} \qquad R_0 = (0, \overset{y}{0}, \tfrac{3}{2})$$

$$P_0 = (-1, 0, 1)$$

$$\overline{R_0 P_0} = \sqrt{1 + \left(1 - \frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

ora, è $k_n^{\mathcal{C}} = - \dfrac{1}{N} = - \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

Calcoliamo $K(P_0)$; intanto è $k_2 = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

ci resta da calcolare la curvatura del meridiano $z = x^2$

curvatura normale del parallelo pass. per $P_0$

$' = \dfrac{d}{dx}$

è subito $k_1 = \pm \dfrac{z''}{(1 + z'^2)^{\frac{3}{2}}}$

( dovrà risultare $k_1 < 0$ )

$$z = x^2 \qquad z' = 2x \qquad z'' = 2$$

$$\frac{z''}{(1 + z'^2)^{3/2}} = \frac{2}{\left(1 + [2(-1)]^2\right)^{3/2}} = \frac{2}{(1+4)^{3/2}} = \frac{2}{5^{3/2}}$$

$$\Rightarrow k_1 = - \frac{2}{5^{3/2}}$$

$$\boxed{K(P_0) = \left(- \frac{2}{5^{\frac{1}{2}}}\right) \cdot \left(- \frac{2}{5^{3/2}}\right) = \frac{4}{5^{4/2}} = \frac{4}{5^2} = \left(\frac{2}{5}\right)^2}$$

$$= \frac{4}{25}$$