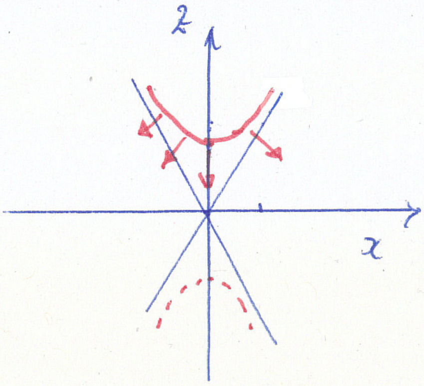
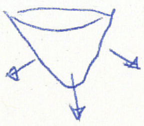
GEOMETRIA II

Prof. M. Spera, UCSC Brescia
a.a. 2016/17

Prova scritta dell'8 febbraio 2018

①





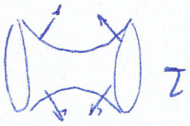
Sia data, nel piano xz, la curva $\mathcal{C}$ di equazione

$$z^2 - 2x^2 - 1 = 0 \,, \qquad z > 0$$

Si determini la curvatura gaussiana K della superficie Σ ottenuta ruotando $\mathcal{C}$ attorno all'asse z.

②

Stesso esercizio, stessa $\mathcal{C}$ di ①, ma Σ' è ottenuta ruotando $\mathcal{C}$ attorno all'asse x (con l'orientamento in figura).



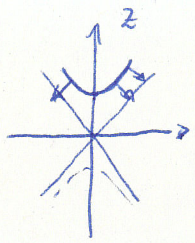
Qual è il segno di K' (curvatura gaussiana di Σ')?

Σ e Σ' possono essere isometriche? Perché?

Tempo a disposizione: 1h 30m

Le risposte vanno adeguatamente giustificate

1



$$f(x,z) = z^2 - 2x^2 - 1 = 0 \qquad z > 0$$

$z \pm \sqrt{2}\, x = 0$ asintoti

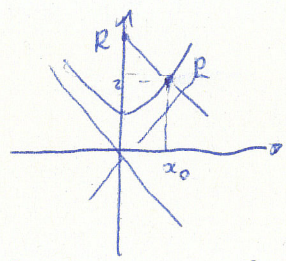
$z = \mp \sqrt{2}\, x$

si ruoti attorno all'asse z

Determinare K

Possiamo usare il teorema della gran normale

k_n^{par} :



$f(x,y)=0 \qquad f_x^0 (x - x_0) + f_y^0 (y - y_0) = 0$ tangente in $P_0 : (x_0, y_0)$

$(f_x^0, f_y^0) \neq (0,0)$

normale : $f_y^0 (x - x_0) - f_x^0 (y - y_0) = 0$

qui $y \to z$ $\qquad f_x = -4x$

$f_z = 2z$

$$\begin{cases} \cancel{2} z_0 (x - x_0) + \overset{2}{\cancel{4}} x_0 (z - z_0) = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$-z_0 x_0 + 2 x_0 (z - z_0) = 0 \qquad x_0 \neq 0$$

$$z - z_0 = \frac{z_0 \cancel{x_0}}{2 \cancel{x_0}} \qquad z = z_0 + \frac{z_0}{2} = \frac{3}{2} z_0$$

$P : (x_0, z_0)$; $R : \left(0, \frac{3}{2} z_0\right)$ $\qquad N = \overline{PR} = \sqrt{x_0^2 + \frac{z_0^2}{4}}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{4x_0^2 + z_0^2}$; ma $z_0^2 = 2x_0^2 + 1$

$N = \frac{1}{2}\sqrt{6x_0^2 + 1} \qquad k_n^{par} = -\frac{1}{N} = -\frac{2}{\sqrt{6x_0^2+1}}$

Calcoliamo ora $k_n^{mer} = -k^{mer}$

$\uparrow P_0$

$$z^2 - 2x^2 - 1 = 0 \qquad ' = \frac{d}{dx}$$

$$2zz' - 4x = 0$$

$$zz' - 2x = 0 \qquad z' = \frac{2x}{z}$$

$$z'^2 + zz'' - 2 = 0$$

$$\frac{4x^2}{z^2} + zz'' - 2 = 0 \qquad zz'' = 2 - \frac{4x^2}{z^2} = \frac{2z^2 - 4x^2}{z^2}$$

$$z'' = \frac{2z^2 - 4x^2}{z^3} \overset{P_0}{=} \frac{2(z^2 - 2x^2 - 1) + 2}{z^3} = \frac{2}{z^3}$$

$$k^{mer} = \frac{z''}{(1 + z'^2)^{3/2}} = \frac{2}{z^3\left(1 + \frac{4x^2}{z^2}\right)^{3/2}} = \frac{2}{z^3\left(\frac{z^2 + 4x^2}{z^2}\right)^{3/2}}$$

$$= \frac{2}{\cancel{z^3}\,\frac{(z^2 + 4x^2)^{3/2}}{\cancel{z^3}}} = \frac{2}{(z^2 + 4x^2)^{3/2}}$$

ma $z^2 = 2x^2 + 1 \Rightarrow z^2 + 4x^2 = 6x^2 + 1$

sicché $k^{mer} = \dfrac{2}{(6x_0^2 + 1)^{3/2}}$ e $k_n^{mer} = -\dfrac{2}{(6x_0^2+1)^{3/2}}$

$$\Rightarrow K = k_n^{par} k_n^{mer} = \left(-\frac{2}{(6x_0^2+1)^{1/2}}\right)\cdot\left(-\frac{2}{(6x_0^2+1)^{3/2}}\right) = \frac{4}{(6x_0^2+1)^2}$$

$K > 0$ come era da attendersi

(2) Stesso esercizio, ruotando attorno all'asse x

si ottiene stavolta $K < 0$.

Le due superficie non possono essere isometriche in virtù del "Theorema egregium"

(sup. (loc) isometriche hanno la stessa curvatura)