ISTITUZIONI DI GEOMETRIA SUPERIORE

Prof. M. Spera . UCSC Brescia

Prova scritta dell' 11 luglio 2018

(1) In $(\mathbb{R}^2, dq \wedge dp)$ siano dati i campi vettoriali

(solo 9 crediti)

$$X = \alpha \frac{\partial}{\partial q} + \beta \frac{\partial}{\partial p}, \quad Y = \beta \frac{\partial}{\partial q} - \alpha \frac{\partial}{\partial p} \qquad \alpha, \beta \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$$

Sotto quali condizioni X e Y sono entrambi Hamiltoniani?
[fac: come si interpretano le condizioni trovate?]

(2) (i) In $\mathbb{R}^2$, $x>0$, $y>0$ si consideri

(tutti)

l'equazione $y' = x y^2$

La si risolva (facile) interpretandola in termini di forme differenziali

(ii) Lo stesso per $\begin{cases} z_x = x^2 y \\ z_y = \frac{x^3}{3} + \beta(y) \end{cases}$ (in $\mathbb{R}^3$...)

Per quali β l'eq. è risolubile?

(3) Sia $(\mathbb{H}, ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2})$ [piano iperbolico]

(tutti)

$\mathbb{H} = \{(x,y) \mid y>0\}$, $ds^2 = g$

e $X = f(x,y) \frac{\partial}{\partial x}$ $\quad (f \in C^\infty(\mathbb{H}))$

Determinare f in modo che X sia di Killing per g

Tempo a disposizione: 1 h.
Le risposte vanno adeguatamente giustificate

(1)

$$X = \alpha \frac{\partial}{\partial q} + \beta \frac{\partial}{\partial p} \quad \text{Hamiltoniano}$$

sotto quali cond. $Y = \beta \frac{\partial}{\partial q} - \alpha \frac{\partial}{\partial q}$ ($X \perp Y$ metr. st.)

è pure hamiltoniano!

$$i_X \, dq \wedge dp = (i_X dq) \wedge dp - dq \wedge (i_X dp)$$

$$= X(q)\, dp - X(p)\, dq$$

$$= \alpha\, dp - \beta\, dq = -\beta\, dq + \alpha\, dp$$

tale forma deve essere chiusa! $\frac{\partial \alpha}{\partial q} + \frac{\partial \beta}{\partial p} = 0$

Similmente: $\frac{\partial \beta}{\partial q} - \frac{\partial \alpha}{\partial p} = 0$ $\quad \frac{\partial \alpha}{\partial p} = \frac{\partial \beta}{\partial q}$

$-\frac{\partial \alpha}{\partial q} = \frac{\partial \beta}{\partial p}$

$$\Downarrow$$

$$\beta + i\alpha = \underbrace{f}_{\text{olomorfa}}(q + ip)$$

$u_x = v_y$

$u_y = -v_x$

② (1) $y' = x y^2$ $\qquad x>0$, $y>0$

$dy - x y^2 dx = 0$

$\underbrace{x y^2}_{P} dx \underbrace{- dy}_{Q} = 0$ $\qquad P = xy^2, \quad Q = -1$

$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -2xy \neq 0$

fattore integrante: $f = f(x,y)$

$f x y^2 dx - f dy = 0$ $\qquad -\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial (f x y^2)}{\partial y} =$

$= -f_x - f_y x y^2 - 2 f x y = 0$

Scegliamo $f = f(y) > 0$. Allora $f_y \cancel{x} y^{\cancel{2}} + 2 f \cancel{y}\cancel{x} = 0$

$\frac{1}{2} \frac{f_y}{f} = -\frac{1}{y}$

$\frac{1}{2} \log f = -\log y = \log y^{-1} + c$

$\sqrt{f} = y^{-1}$ $\qquad f = \frac{1}{y^2}$

$x\, dx - \frac{dy}{y^2} = 0$

$\frac{x^2}{2} - \frac{y^{-1}}{-1} = c$ $\qquad \boxed{\frac{x^2}{2} + \frac{1}{y} = c}$

$\frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} - c$ $\qquad y = \frac{1}{\frac{x^2}{2} - c}$

Osservazione: da $xy^2 dx - dy = 0$ si vede subito che dividendo per y^2 è $x\,dx - \frac{dy}{y^2} = 0$ che è a variabili separabili...

② (ii) $\begin{cases} z_x = x^2 y \\ z_y = \frac{x^3}{3} + \beta(y) \end{cases}$

$$\omega = dz - x^2 y\, dx - \left(\frac{x^3}{3} + \beta\right) dy = 0$$

si trova $\quad \omega \wedge d\omega = 0 \iff z_{xy} = z_{yx}$ (Schwarz)

+ Frobenius

$$z_{xy} = x^2 \qquad z_{yx} = x^2$$

Qualsiasi β è accettabile

Risolviamo: integriamo la prima:

$$z(x,y) = \frac{x^3}{3} y + \alpha(y)$$

$$z_y(x,y) = \frac{x^3}{3} + \alpha'(y) = \frac{x^3}{3} + \beta(y)$$

$$\Rightarrow \alpha' = \beta$$

$$\Rightarrow \quad z(x,y) = \frac{x^3}{3} y + \alpha(y)$$

α primitiva di β, arbitraria

③ Sia dato il piano iperbolico

$$\left(\mathbb{H},\ \underset{\underset{g}{\parallel}}{ds^2} = \frac{dx^2+dy^2}{y^2}\right)$$

Sia $X = f(x,y)\frac{\partial}{\partial x}$ determinare f in modo che X sia di Killing.

$$\mathcal{L}_X g = 0 \qquad \mathcal{L}_X\left\{\frac{1}{y^2}(dx^2+dy^2)\right\} =$$

$$= \underset{\underset{0}{\parallel}}{\mathcal{L}_X\left(\frac{1}{y^2}\right)}(dx^2+dy^2) + \mathcal{L}_X(dx)dx + dx\,\mathcal{L}_X(dx) + \mathcal{L}_X(dy)\,dy + dy\,\mathcal{L}_X dy \qquad = 0$$

$$\mathcal{L}_X dx = d(\mathcal{L}_X x) = d\,f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

$$\mathcal{L}_X dy = d(\mathcal{L}_X dy) = d\,(X(y)) = 0 \qquad \Rightarrow$$

$$\underset{\parallel}{\mathcal{L}_X g}\ \left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right)dx + dx\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right)$$

$$= 2\frac{\partial f}{\partial x}dx^2 + 2\frac{\partial f}{\partial y}dx\,dy.$$

Perciò $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$

$\Rightarrow f$ costante
