ISTITUZIONI DI GEOMETRIA SUPERIORE

Prof. M. Spera - UCSC, Brescia

Prova scritta del 7 febbraio 2018

① (tutti) Nell'ambito della geometria riemanniana "alla Cartan", a partire dalla seconda equazione di struttura, si dimostri l'identità di Bianchi

$$d\Omega = \Omega \wedge \omega - \omega \wedge \Omega$$

② (tutti) In $\mathcal{U} = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ y > 0 \}$

sia data la metrica $ds^2 = dx^2 + y^2 dy^2$

se ne determini la curvatura e le relative geodetiche e si dimostri che $X = y^{-1} \frac{\partial}{\partial y}$ ne è un campo di Killing

[Sugg. È possibile fornire una soluzione molto rapida]

③ (tutti) $\{x>0\} \subset \mathbb{R}^3$, per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$, la distribuzione $\Delta_\alpha = \langle X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \ X_2 = \frac{\partial}{\partial y} + \alpha x \frac{\partial}{\partial z} \rangle$

risulta completamente integrabile?

In tutti i casi si determini una 1-forma ω_α tale che $\Delta_\alpha = \ker \omega_\alpha$ e si risolva nuovamente il problema.

Tempo a disposizione: 1h.

Le risposte vanno adeguatamente giustificate

I fbi geo sup 17/1/18

(1) Seconda equazione di struttura:

$$\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega$$

ω forma di connessione (a valori matrici)

Differenziando si ha:

$$d\Omega = \underbrace{d^2\omega}_{=0} + d(\omega \wedge \omega) = d\omega \wedge \omega - \omega \wedge d\omega$$

(ok anche per forme a valori matrici)

ora

$$\Omega \wedge \omega = d\omega \wedge \omega + \omega \wedge \omega \wedge \omega$$

$$\omega \wedge \Omega = \omega \wedge d\omega + \omega \wedge \omega \wedge \omega$$

Sicché $\quad d\Omega = \Omega \wedge \omega - \omega \wedge \Omega \quad$ come richiesto.

◆ ◆ ◆

(2) $\mathcal{U} = \{y > 0\} \qquad ds^2 = dx^2 + y^2 dy^2$

ora $\quad y^2 dy^2 = \left[d\left(\frac{y^2}{2}\right)\right]^2 \Rightarrow$ ponendo

$\xi := \frac{y^2}{2}$, è $(*)$ $ds^2 = dx^2 + d\xi^2$

la metrica è euclidea rispetto a (x, ξ) $\Rightarrow K = 0$ curvatura riem, sez, scalare, gaussiana

geodetiche: rette di (x, ξ) ($\xi > 0$

$$A x + B\xi + C = 0 \quad \rightsquigarrow \quad A x + B\frac{y^2}{2} + C = 0$$

(genericamente: parabole)

Per la seconda parte procediamo così ("finezza")

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}^{*\,\text{test}} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi} \qquad \frac{\partial y}{\partial \xi} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^{-1} = \frac{1}{y}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \xi}$$

(abuso di notazione) e $\frac{\partial}{\partial \xi}$ è di Killing per $(*)$ (ovvio)

un calcolo diretto porge subito lo stesso risultato

Facciamolo comunque:

$$\mathcal{L}_{y^{-1}\frac{\partial}{\partial y}}(dx^2 + y^2 dy^2) = \dots \mathcal{L}_{y^{-1}\frac{\partial}{\partial y}} y^2 dy^2$$

$$= \mathcal{L}_{y^{-1}\frac{\partial}{\partial y}}(y^2)\, dy^2 + y^2\, \mathcal{L}_{y^{-1}\partial_y}(dy)\, dy + y^2\, dy\, \mathcal{L}_{y^{-1}\partial_y}(dy)$$

$$\mathcal{L}_{y^{-1}\partial_y}(dy) = d\,\mathcal{L}_{y^{-1}\partial_y} y = d(y^{-1}) = -\frac{1}{y^2}\, dy$$

$$= \underbrace{2y^{-1}\cdot y\, dy^2}_{= 2dy^2} + (-dy^2)$$

$$2dy^2 + (-dy^2)$$

$$= 0$$

◆ ◆ ◆

③ Calcoliamo: $[X_1, X_2] = \dots = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \alpha x \frac{\partial}{\partial z}\right] = \alpha \frac{\partial}{\partial z}$

$$\begin{array}{c} X_1 \\ X_2 \\ [X_1, X_2] \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha x \\ 0 & 0 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha \Rightarrow$$ per l'integrabilità deve essere nec. $\alpha = 0$

Troviamo w_α: $\quad w_\alpha = \xi\, dx + \eta\, dy + \zeta\, dz$

$0 = w_\alpha(X_1) = \xi \Rightarrow \xi = 0$

$$(\xi\, dx + \eta\, dy + \zeta\, dz)\left(\frac{\partial}{\partial y} + \alpha x \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$0 = w_\alpha(X_2) = \eta + \zeta \cdot \alpha x = 0$

$$\eta + \zeta \alpha x$$

$\sim$ ad $\zeta = 1 \quad \eta = -\alpha x$

$w_\alpha = -\alpha x \cdot dy + dz$

$$\omega_\alpha = -\alpha x\, dy + dz$$

$$d\omega_\alpha = -\alpha\, dx \wedge dy$$

$$\omega_\alpha \wedge d\omega_\alpha = \dots = -\alpha\, dx \wedge dy \wedge dz \qquad \text{integr.:} \quad \alpha = 0 \ \checkmark$$

verifica nucleo: $\quad X = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y} + \zeta \frac{\partial}{\partial z}$

$\omega_\alpha(X) = 0 \qquad 0 = (-\alpha x\, dy + dz)\left(\xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y} + \zeta \frac{\partial}{\partial z}\right) =$

$= \quad -\alpha x \cdot \eta + \zeta = 0 \qquad \Rightarrow \quad \xi$ libero

$\zeta = \alpha x \cdot \eta$

prendiamo $\eta = 1 \quad \rightsquigarrow \zeta = \alpha x$

$\rightsquigarrow$ base: $\quad \left(X_1 , X_2 \right)$

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad X_2 = \frac{\partial}{\partial y} + \alpha x \frac{\partial}{\partial z} \qquad \checkmark$$