ISTITUZIONI DI GEOMETRIA SUPERIORE
a.a. 2017/18

Prof. M. Spera
UCSC Brescia

Prova scritta del
12 settembre 2018
(5 settembre 2018)

(1) Sia G un gruppo di Lie compatto dotato di metrica $\langle\, ,\, \rangle$ bi-invariante.

solo 9 crediti

Sia ∇ una connessione priva di torsione per la quale le geodetiche sono i traslati di sottogruppi ad un parametro.
Dimostrare che ∇ è la connessione di Cartan
(Sugg. $\nabla_{X+Y}(X+Y) = 0$) $\quad X, Y \in \mathfrak{g}$

(2) Sia data la famiglia di superfici in $\mathbb{R}^3$
$$f_\alpha = x^2 + y^2 - z^2 - \alpha = 0$$
Determinare una distribuzione involutoria Δ per la quale $f_\alpha = 0$ risultino le sottovarietà integrali

(3) Sia data, in $\mathbb{R}^3$, la distribuzione
$$\Delta = \langle X = (z, 0, x),\ Y = (0, z, y) \rangle \qquad (x>0,\ y>0,\ z>0)$$
Si dimostri che Δ è involutoria e se ne determinino le s. varietà integrali

---

Tempo a disposizione: 1h

Le risposte vanno adeguatamente giustificate

① $0 = \nabla_{X+Y}(X+Y) = \underbrace{\nabla_X X}_{\overset{\text{ip.}}{=}0} + \underbrace{\nabla_Y Y}_{=0} + \nabla_X Y + \nabla_Y X = 0$

$X, Y \in \mathfrak{g}$

$(\ast)$ $\nabla_X Y + \nabla_X Y = 0$

Ma ∇ è priva di torsione, pertanto

$(\ast\ast)$ $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$

Allora $(\ast\ast) + (\ast)$ dà:

$$2\nabla_X Y = [X, Y] \Rightarrow \nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y]$$

$\Rightarrow$ ∇ è la connessione di Cartan

② Δ è individuata da $df_\alpha(X) = 0$

$(\Delta = \ker df)$ $X = \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial y} + \gamma \frac{\partial}{\partial z}$

$df_\alpha(X) = 2x \cdot \alpha + 2y \cdot \beta - 2z \cdot \gamma = 0$

$\leadsto$ base: $X = z \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial z}$

$Y = z \frac{\partial}{\partial y} + y \frac{\partial}{\partial z}$

③ $\Delta = \langle X, Y \rangle$. Controlliamo che sia involutoria

$[X, Y] = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}$

$([X,Y] = cl.(X,Y))$

$$\begin{vmatrix} -y & x & 0 \\ z & 0 & x \\ 0 & z & y \end{vmatrix} = -xyz + xyz = 0$$

✓

sottovarietà integrali:

$$\omega = \alpha\, dx + \beta\, dy + \gamma\, dz \quad = 0$$

$$\omega(X) = \omega(Y) = 0$$

$\omega(X) = \alpha z + \gamma x = 0$ $\rightsquigarrow$ $\alpha = x \quad \gamma = -z$

$\omega(Y) = \beta \cdot z + \gamma y = 0$ $\quad \beta = y$ sono ok

$$\omega = x\, dx + y\, dy - z\, dz$$

$$= \frac{1}{2}\, d(x^2 + y^2 - z^2)$$

posto $f = x^2 + y^2 - z^2$ si ha $f = c$

(S. V. integrali) ✓