ISTITUZIONI DI GEOMETRIA SUPERIORE

Prof. M. Spera UCSC Brescia

Prova scritta del 6 febbraio 2019

(1) Determinare l'algebra di Lie di $SO(n)$

(2) Date le distribuzioni in $\{x>0, y>0, z>0\}$

$$w_\alpha = 0 \qquad w_\alpha = x\,dy + \alpha\,dz \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

determinare quelle integrabili, esibendone anche una base locale di campi vettoriali commutanti

(3) Dimostrare l'identità di Bianchi

$$R(X,Y,Z,W) + R(Y,Z,X,W) + R(Z,X,Y,W) = 0$$

per il tensore di curvatura di Riemann associato alla connessione di Levi-Civita

(sugg.: dimostrare che $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y$
$= ([[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y])$)

Tempo a disposizione: 1h

Le risposte vanno adeguatamente giustificate

Ist. di geo sup
6/2/19

① v. note

② $d\omega_\alpha = dx \wedge dy$

$\omega_\alpha \wedge d\omega_\alpha = (x\,dy + \alpha\,dz) \wedge dx \wedge dy$

$= \alpha\,dz \wedge dx \wedge dy \quad = 0 \iff \alpha = 0$

$\omega_0 = x\,dy \quad \sim \quad dy = 0 \qquad y = c$

varietà di livello

$\Delta_0 = \langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial z} \rangle$

③

$$\nabla_{[X,Y]} Z - [\nabla_X, \nabla_Y] Z \; +$$

$$\nabla_{[Y,Z]} X - [\nabla_Y, \nabla_Z] X \; +$$

$$\nabla_{[Z,X]} Y - [\nabla_Z, \nabla_X] Y$$

$$= \nabla_{[X,Y]} Z - \nabla_X(\nabla_Y Z) + \nabla_Y(\nabla_X Z) \; +$$

$$\nabla_{[Y,Z]} X - \nabla_Y(\nabla_Z X) + \nabla_Z(\nabla_Y X) \; +$$

$$\nabla_{[Z,X]} Y - \nabla_Z(\nabla_X Y) + \nabla_X(\nabla_Z Y)$$

$$= \overbrace{\nabla_{[X,Y]} Z + \nabla_{[Y,Z]} X + \nabla_{[Z,X]} Y}^{①}$$

$$+ \nabla_Y \{ \nabla_X Z - \nabla_Z X \} + \nabla_Z \{ \nabla_Y X - \nabla_X Y \}$$

$$+ \nabla_X \{ \nabla_Z Y - \nabla_Y Z \}$$

$$= ① + \nabla_Y([X,Z]) + \nabla_Z([X,Y]) + \nabla_X([Z,Y])$$

$= \nabla_{[Z,X]} Y + \nabla_Y([X,Z])$ + termini simili

$$= \nabla_Y [X,Z] - \nabla_{[X,Z]} Y + \dots$$

$= [Y[X,Z]]$ + termini simili $= 0$ (Jacobi)