ISTITUZIONI DI GEOMETRIA SUPERIORE

Prof. M. Spera

Prova scritta del 10 luglio 2019

① Sia $\omega \in \Lambda^1(M)$ (M var. diff.)

A partire dalla formula ($X, Y \in \mathfrak{X}(M)$)

$$d\omega(X,Y) = X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X,Y])$$

si dimostri che

$$(*) \quad \mathcal{L}_X i_Y \omega - i_Y \mathcal{L}_X \omega = i_{[X,Y]}\omega$$

[la formula vale per $\Lambda^k(M)$]

② Sia (M, ω) una varietà simplettica connessa. Siano dati X, Y campi hamiltoniani, $[X,Y]=0$. Dimostrare che la funzione $m \mapsto \omega(X,Y)(m)$ è costante. [Si utilizzi la formula precedente $(*)$]

③ In $M = \{(x,y,z) \mid x>0,\ y>0,\ x \neq y\}$ siano dati

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} \qquad Y = y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$$

Si calcoli $[X,Y]$. Dimostrare che (X,Y) fornisce una base per una distribuzione integrabile Δ, della quale si chiede di individuarne le sottovarietà integrali.

Tempo a disposizione: 1h

Le risposte vanno adeguatamente giustificate

② Sia (M, ω) una varietà simplettica connessa

X, Y campi hamiltoniani, $[X, Y] = 0$

Dimostrare che la funzione $\omega(X, Y)$ è costante

Sol. Dalla formula

$$\mathcal{L}_X i_Y \omega - i_Y \mathcal{L}_X \omega = i_{[X,Y]} \omega$$

(valida in generale) abbiamo: $i_{[X,Y]} \omega = 0$

$\mathcal{L}_X \omega = 0$ (X è ham $\Rightarrow$ X simplettico)

Sicché $\mathcal{L}_X i_Y \omega = 0$

$$(i_X d + d i_X) i_Y \omega = i_X d i_Y \omega + d i_X i_Y \omega = 0$$

ma $i_Y \omega = d\lambda_Y$ (Y è hamiltoniano)

$\Rightarrow$ $d i_Y \omega = d^2 \lambda_Y = 0$

$\Rightarrow$ $d(i_X i_Y \omega) = 0$

i.e. $d[\omega(Y, X)] = 0$ $\Rightarrow$ (M è connessa)

$\omega(X, Y) = $ costante

Istit geom sup
10/7/19

① Sia $\omega \in \Lambda^1(M)$

A partire da $d\omega(X,Y) = X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X,Y])$

dimostrare che

$$\underbrace{\mathcal{L}_X i_Y \omega}_{A} - \overbrace{i_Y \mathcal{L}_X \omega}^{B} = i_{[X,Y]}\omega$$

[la formula è in realtà generale]

Sol: $\Lambda^0 \ni$

$A = \mathcal{L}_X i_Y \omega = \mathcal{L}_X \omega(Y) = X\omega(Y)$

$B = i_Y(i_X d + d i_X)\omega = i_Y i_X d\omega + i_Y d i_X \omega$

$= (d\omega)(X,Y) + i_Y d\,\omega(X)$

$= d\omega(X,Y) + d\omega(X)(Y)$

$= d\omega(X,Y) + Y\omega(X)$

$A - B = X\omega(Y) - Y\omega(X) - [X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X,Y])]$

$= +\,\omega([X,Y]) = i_{[X,Y]}\omega$ ✓

(3) Calcolare $[X,Y]$ in $\{(x,y,z) \mid x>0,\ y>0,\ x \neq y\}$

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} \qquad Y = y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$$

$$[X,Y] = -y\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} - x\frac{\partial}{\partial y} = 0$$

(X,Y) base locale per una distr. integrabile : $z = c$